Казанский государственный университет
Физический факультет

РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Векторный анализ
(III семестр)

Казань 2007

УДК 517

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
физического факультета
Казанского государственного университета

Рецензент
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей математике КГУ
В. А. Сочнева

Составитель А. М. Анчиков

Расчетные задания по математике. Векторный анализ. (III семестр). – Казань: – 2006.

В расчетной работе представлены задачи по скалярным и векторным полям (12 вариантов по 25 задач в каждом варианте).

Введение

Предлагаемый сборник расчетных заданий составлен для студентов второго курса физического факультета.

Сборник содержит два задания по скалярным полям, десять заданий по векторным полям. Предложены задачи на вычисление градиента скалярных полей, дивергенции, ротора, потока векторных полей в декартовых, в цилиндрических и сферических координатах, а также задачи на потенциальные и соленоидальные поля, на интегральные характеристики векторных полей.

Рекомендуется выполнить задания параллельно с прохождением материала на практических занятиях.

1. Линии и поверхности уровня скалярных полей.

1. Найти и нарисовать линии уровня скалярного поля $u = xy$. Вычислить и изобразить на чертеже градиент этой функции в точках M_0 (1, 1) и M_1 (1,-1).
2. Найти и нарисовать линии уровня скалярного поля $u = (x - y)^2$. Вычислить и начертить вектор $\operatorname{grad} u$ в точках A(-1, 1) и B(1, 1).
3. Найти линии уровня скалярного поля $u = e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$ и нарисовать линии уровня $u(x, y) = e$ и $u(x, y) = e^{\frac{1}{2}}$. Вычислить и начертить вектор $\operatorname{grad} u$ в точках A(1, 1), B(2, 0) и C(1,-1).
4. Найти и нарисовать линии уровня скалярного поля $u = \min(x, y)$. Вычислить и начертить вектор $\operatorname{grad} u$ в точках A(2,1) и B(1,2).
5. Найти и нарисовать линию уровня скалярного поля $u = y^2 + x$.
6. Найти и нарисовать линии уровня скалярного поля $u = \frac{y}{x}$, проходящую через точки A(1, -1) и B(-1,-2).
7. Найти поверхности уровня поля $u = x - y + 2z$ и нарисовать поверхность, проходящую через т.(1, 1, 1).
8. Найти поверхности уровня поля $u = x^2 + y \;\; - z^2$ и нарисовать поверхность, проходящую через т.(1, 0, 1).
9. Найти поверхности уровня поля $u = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
10. Найти поверхности уровня поля $u = e^{(\bar{a}\,\bar{r})}$ где $\bar{a}$ – постоянный вектор, $\bar{r}$ – радиус вектора точки.
11. Найти поверхности уровня поля $u = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$.
12. Найти поверхности уровня поля $u = x^2 + y^2 - 2z$.
13. Найти поверхности уровня поля $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$.
14. Найти поверхности уровня поля $u = 5^{x-y+2z}$.
15. Найти поверхности уровня поля $u = 2y^2 + 9z^2$.
16. Найти поверхности уровня поля $u = \frac{(\bar{a}\,\bar{r})}{(\bar{b},\bar{r})}$, где $\bar{a}, \bar{b}$ – постоянные векторы, $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M(x, y, z).
17. Найти поверхности уровня поля $u = \ln|\bar{r}\;|$, $\bar{r}$ – радиус – вектор точки M(x, y, z).
18. Найти линии уровня поля u, заданного неявно уравнением $u + x\ln u - y = 0$.
19. Найти линии уровня поля $u = \ln\sqrt{\frac{y}{2x}}$.
20. Найти поверхности уровня поля $u = \frac{1}{x^2 + y^2 + z}$.
21. Найти поверхности уровня поля $u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z}$.
22. Найти поверхности уровня поля $u = \frac{x^2 - y^2}{2} + z$.
23. Найти поверхность уровня поля $u = x^2 + 2y^2 - z^2$, проходящую через т. A(2, 3, -1).

24. Найти линию уровня поля u заданного неявно уравнением $u^2 - ye^u + x = 0$, проходящую через т.(1, 1).

25. Найти поверхности уровня поля $u = e^{\frac{y^2+z^2}{x^2}}$.

2. Производная по направлению. Градиент.

1. Найти производную скалярного поля $u = x^2 - y^2 - z^2$ в точке M_0 (1, -1, 1) по направлению от точки M_0 к точке M_1(2, 3, 1).
2. Найти производную скалярного поля $u = xz^2 + 2yz$ в точке M_0(1, 0, 2) вдоль окружности $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t - 1 \\ z = 1 \end{cases}$.
3. Найти производную скалярного поля u в точке M_0(3, 0, 2) по направлению от точки M_0 к точке M_1(4, 1, 3), если $u = xe^y + ye^x - z^2$.
4. Найти производную скалярного поля u в точке M_0(1, 1) по направлению от точки M_0 к точке M_1(4, 5), если $u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$.
5. Найти производную скалярного поля $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке M_0(2, -2) окружности $x^2 + y^2 - 4x = 0$ вдоль дуги этой окружности.
6. Найти производную скалярного поля $u = \ln(xy + yz + zx)$ в точке M_0(0, 1, 1) по направлению окружности $x = \cos t, y = \sin t, z = 2$.
7. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке M_0, соответствующей значению параметра $t = \frac{\pi}{2}$ по направлению винтовой линии $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$; a, b, > 0.
8. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + y^2$ в точке $M_0(x_{0,}\ y_0)$ окружности $x^2 + y^2 = R^2$ по направлению этой окружности.
9. Найти производную скалярного поля $u = \frac{x^2 - y^2}{2} + z$ в точке M_0(-1, 1, 1) по направлению прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{2}$.
10. Найти производную скалярного поля $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$ в точке M_0(-1, 2, 1) в направлении радиуса – вектора этой точки.
11. Найти производную скалярного поля $u = \frac{1}{r}$, где $r = |\bar{r}|$ в направлении вектора $\bar{e}$ (-1, 2, 3). При каком условии эта производная равна нулю.
12. Найти производную скалярного поля $u = zxe^y$ в точке M_0(1, 1, 0) по направлению ее градиента в этой же точке.
13. Найти угол между градиентами скалярных полей $u = x^2 + yz + zx$ и $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точке M_0(1, 1, 1).

14. Найти угол между градиентами функции $y = \operatorname{arctg}\frac{x+z}{y}$ в точках $M_0(1, 1, 1)$ и $M_1(-1, -1, -1)$.
15. Найти угол между градиентами функции $u = r$ и $v = 2\ln r$ в точке $M_0(-1, -1, -1)$.
16. Найти точки, в которых градиент скалярного поля $u = \cos(x + y)$ равен $\bar{i} + \bar{j}$.
17. Найти точки, в которых модуль градиента скалярного поля $u = \ln r$ равен 5.
18. Найти производную скалярного поля $u = u(x, y, z)$ по направлению градиента скалярного поля $v = v(x, y, z)$. При каком условии она равна нулю.
19. Под каким углом пересекаются поверхности уровней скалярных полей $u = x^2 + y^2 - 2z^2$ и $v = xyz$?
20. Найти семейство линий наибыстрейшего возрастания скалярного поля $u = xyz$.
21. Найти семейство линий наибыстрейшего возрастания скалярного поля $u = x^2 + y^2 - z^2$.
22. Убедиться в ортогональности линий уровня скалярных полей $u = 2x^2 + y^2$ и $I = \frac{y^2}{x}$.
23. Найти точки, в которых градиент скалярного поля $u = 2x^2 - 4xy + y^2 - 2yz + 6z$ равен нулю (стационарная точка).
24. Найти скорость и направление наибыстрейшего возрастания поля $u = xyz$ в точке $M_0(-1, 0, 1)$.
25. Найти точки, в которых градиент скалярного поля $u = x^2 + y^2 - 2xy$:
а) перпендикулярен прямой $y = x$, б) равен нулю.

3. Векторные линии.

Найти векторные линии поля, проходящие через точку $M_0(x_{0,} y_0, z_0)$:

1. $\bar{F} = y\bar{i} - x\bar{j}$, $M_0(1, -1, 1)$;
2. $\bar{F} = x\bar{i} - y\bar{j}$, $M_0(0, 1, 1)$;
3. $\bar{F} = y\bar{i} + \bar{j}$, $M_0(1, 0, 1)$;
4. $\bar{F} = \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $M_0(1, 2, 3)$;
5. $\bar{F} = [\bar{r}, \bar{c}\ ]$ ($\bar{c}$ – постоянный вектор), $M_0(1, 1, 1)$;
6. $\bar{F} = \frac{\bar{i}}{2x} + \frac{\bar{j}}{y} - \frac{\bar{k}}{z}$, $M_0(1, -1, 1)$;
7. $\bar{F} = \operatorname{grad} u$, где $u = xyz$, $M_0(1, 2, 3)$;
8. $\bar{F} = x^2\bar{i} + y\bar{j} - z^2\bar{k}$, $M_0(-1, -1, -1)$;
9. $\bar{F} = -a^2\bar{i} + b^2x\bar{j}$, (a, b – постоянные), $M_0(0, 1, 1)$;
10. $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + 2z\bar{k}$, $M_0(-1. 2, -1)$;
11. $\bar{F} = \frac{ke}{r^3}\bar{r}$, (кулоновское поле точечного заряда), в начале координат;
12. $\bar{F} = z\bar{i} + b\bar{j} - x\bar{k}$, (b – постоянная), $M_0(0, 1, 0)$;
13. $\bar{F} = (2y - z)\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $M_0(1, 1, 1)$;
14. $\bar{F} = z\bar{i} - y\bar{k}$, $M_0(0, 1, 2)$;
15. $\bar{F} = 3z\bar{j} + 4y\bar{k}$, $M_0(1, 0, 1)$;
16. $\bar{F} = xz\bar{i} + yz\bar{j} - xy\bar{k}$, $M_0(1, 0, 1)$;

17. $\overline{F} = (\overline{a}\,\overline{r})\overline{b}$, $M_0(-1, 0, 1)$, ($\overline{a}$, $\overline{b}$ – постоянные векторы);
18. $\overline{F} = f(r)\overline{r}$, $M_0(1, 1, 2)$;
19. $\overline{F} = (x+2y)\overline{i} + y\overline{j}$, $M_0(1, -1, 5)$;
20. $\overline{F} = xy\overline{i} - x^2\overline{j} + yz\overline{k}$, $M_0(1, 0, 1)$;
21. $\overline{F} = y\overline{i} + x\overline{j} + (x-y)\overline{k}$, $M_0(2, 1, 1)$;
22. $\overline{F} = xy\overline{i} + (x-2z)\overline{j} + yz\overline{k}$, $M_0(1, 1, 1)$;
23. $\overline{F} = (x-y)^2\overline{i} + xz\overline{j} + xy\overline{k}$, $M_0(1, 1, 2)$;
24. $\overline{F} = x\overline{i} + y\overline{j} + (xy+z)\overline{k}$, $M_0(1, 1, 0)$;
25. $\overline{F} = z\overline{i} + xz\overline{j} + y\overline{k}$, $M_0(1, 1, 1)$.

4. Найти поток векторного поля $\overline{a}$ через замкнутую поверхность Σ (нормаль внешняя).

1. $\overline{a} = x^2\overline{i} + x\overline{j} + xz\overline{k}$, $\Sigma = \{z = x^2 + y^2, z = 1, x = 0, y = 0\}$, первый октант;
2. $\overline{a} = x^2\overline{i} + y^2\overline{j} + z^2\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z \ge 0\}$;
3. $\overline{a} = (e^z + 2x)\overline{i} + e^x\overline{j} + e^y\overline{k}$, $\Sigma = \{x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0\}$;
4. $\overline{a} = (x+z)\overline{i} + (z+y)\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 9, z = x, z = 0, z \ge 0\}$;
5. $\overline{a} = x\overline{i} + z\overline{j} - y\overline{k}$, $\Sigma = \{z = 4 - 2(x^2 + y^2), z = 2(x^2 + y^2\}$;
6. $\overline{a} = xy\overline{i} + yz\overline{j} + zx\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 = z^2, z \ge 0\}$;
7. $\overline{a} = x^2\overline{i} + xy\overline{j} + 3z\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = z^2, z = 4\}$;
8. $\overline{a} = z\overline{i} + (3y - x)\overline{j} - z\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2 + 2, z = 0\}$;
9. $\overline{a} = xz\overline{i} + z\overline{j} + y\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 1 - z, z = 0\}$;
10. $\overline{a} = (y+z)\overline{i} + (x - 2y + z)\overline{j} + x\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2, z = 0\}$;
11. $\overline{a} = -2x\overline{i} + z\overline{j} + (x+y)\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 2y, z = x^2 + y^2, z = 0\}$;
12. $\overline{a} = (3x - 2z)\overline{i} + (z - 2y)\overline{j} + (1 + 2z)\overline{k}$, $\Sigma = \{z^2 = 4(x^2 + y^2), z = 2\}$;
13. $\overline{a} = (x + y^2)\overline{i} + (xz + y)\overline{j} + (\sqrt{x^2 + 1} + z)\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = z^2, z = 2, z = 3\}$;
14. $\overline{a} = (\cos z + \frac{x}{4})\overline{i} + (e^x + \frac{y}{4})\overline{j} + (\frac{z}{4} - 1)\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3\}$;
15. $\overline{a} = (y^2 + z^2 + 6x)\overline{i} + (e^z - 2y + x)\overline{j} + (x + y - z)\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 3\}$;
16. $\overline{a} = 2x\overline{i} + z\overline{k}$, $\Sigma = \{z = 3x^2 + 2y^2 + 1, x^2 + y^2 = 4, z = 0\}$;
17. $\overline{a} = (2y - 15x)\overline{i} + (z - y)\overline{j} - (x - 3y)\overline{k}$, $\Sigma = \left\{z = 3x^2 + y^2 + 1, z = 0, x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
18. $\overline{a} = (y^2 + xz)\overline{i} + (yx - z)\overline{j} + (yz + x)\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = \sqrt{2})$;
19. $\overline{a} = (8x + 1)\overline{i} + (zx - 4y)\overline{j} + (e^x - z)\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 2y\}$;
20. $\overline{a} = x\overline{i} + z\overline{j} - y\overline{k}$, $\Sigma = \{z = 4 - 2(x^2 + y^2), z = 2(x^2 + y^2\}$;
21. $\overline{a} = (y + z^2)\overline{i} + (x^2 + 3y)\overline{j} + xy\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 2x\}$;
22. $\overline{a} = (\sin z + 2x)\overline{i} + (\sin x - 3y)\overline{j} + (\sin y + 2z)\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = z^2, z = 3, z = 6\}$;
23. $\overline{a} = (\cos z + 3x)\overline{i} + (x - 2y)\overline{j} + (3z + y^2)\overline{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 = 1, z = 0, x + 2y + 3z = 6\}$;
24. $\overline{a} = (\cos z + 3x)\overline{i} + (x - 2y)\overline{j} + (3z + y^2)\overline{k}$, $\Sigma = \{z^2 = 36(x^2 + y^2), z = 6\}$;
25. $\overline{a} = (2y - 5x)\overline{i} + (x - 1)\overline{j} + (2\sqrt{xy} + 2z)\overline{k}$, $\Sigma = \{2x + 2y - z = 4, x = 0, y = 0, z = 0\}$.

5. Поток векторного поля.

1. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \le z \le h$ в сторону внешней нормали.
2. Вычислить поток вектора $\bar{r}$ через круг $x^2 + y^2 \le 4$, $z = 2$ в сторону положительного направления оси OZ.
3. Вычислить поток постоянного вектора $\bar{a}$ через площадку, перпендикулярную оси OZ имеющую форму круга радиуса R с центром в точке $M_0(0, 0, 3)$ в положительном направлении оси OZ.
4. Найти поток векторного поля $\bar{a} = (x - 2z)\bar{i} + (x + 3y + z)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$ через верхнюю сторону треугольной площадки с вершинами A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1).
5. Найти поток $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через часть поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.
6. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = y\bar{i} + z\bar{j} + x\bar{k}$ через верхнюю сторону треугольной площадки с вершинами A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, a).
7. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k}$ через верхнюю сторону круга, вырезаемого конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ на плоскости $z = h$ (h>0).
8. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = 3x\bar{i} - y\bar{j} - z\bar{k}$ через внешнюю сторону части параболоида $x^2 + y^2 = 9 - z$, расположенной в первом октанте.
9. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = x\bar{i} + z\bar{k}$ через боковую поверхность кругового цилиндра $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, ограниченную плоскостями $z = 0$, $z = h$ (h>0).
10. Вычислить поток векторного поля $\bar{a} = xz\bar{i}$ через внешнюю сторону параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$, ограниченную плоскостью $z = 0$ $(z \ge 0)$.

Найти поток векторного поля $\bar{F}$ через $\sum$ в направлении внешней нормали.

11. $\bar{F} = (x^3 + yz)\bar{i} + (y^3 + xz)\bar{j} + (z^3 + xy)\bar{k}$, $\sum = \{x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \ge 0\}$;
12. $\bar{F} = (xy + x^2)\bar{i} + (2y - 2xy)\bar{j} + (z - yz)\bar{k}$, $\sum = \{x^2 + y^2 = z^2, 0 \le z \le h\}$;
13. $\bar{F} = (x - y + z)\bar{i} + (y - z + x)\bar{j} + (z - x + y)\bar{k}$, $\sum = \{|x| + |y| + |z| = 1\}$;
14. $\bar{F} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} - z\bar{k}$, $\sum = \{z^2 = x^2 + y^2, 0 \le z \le h\}$;
15. $\bar{F} = 2x\bar{i} - y\bar{j} + z\bar{k}$, $\sum = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 4, 3z \ge x^2 + y^2\}$;
16. $\bar{F} = x^2y\bar{i} + xy^2\bar{j} + xyz\bar{k}$, $\sum = \{x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ x, y, z \ge 0\}$;
17. $\bar{F} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$, $\sum = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \le 0\}$;
18. $\bar{F} = y^2\bar{j} + z\bar{k}$, $\sum = \{z = x^2 + y^2, z \le 2\}$;
19. $\bar{F} = x\bar{i} - xy\bar{j} + z\bar{k}$, $\sum$ – часть цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченная плоскостями $z = 0$, $x + z = R$;
20. $\bar{F} = xz\bar{i} + yz\bar{j} + z^2\bar{k}$, $\sum$ – часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, отсеченная плоскостью $z = 2 (z \ge 2)$;
21. $\bar{F} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$, $\sum = \left\{x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} Z^2, 0 \le Z \le H\right\}$;
22. $\bar{F} = (3x - 1)\bar{i} + (y - x + z)\bar{j} + 4z\bar{k}$, $\sum$ – поверхность призмы, образованной плоскостью $2x - y - 2z + 2 = 0$ и координатными плоскостями.

23. Найти поток вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через всю поверхность тела $\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2} \le Z \le H$ в направлении внешней нормали.

24. Вычислить поток радиуса вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через боковую поверхность кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1$ и $x + y + z = 2$.

25. Найти поток векторного поля $\bar{a} = x\bar{i} - xy\bar{j} + z\bar{k}$ через внешнюю сторону цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченной плоскостями $y = 1$ и $x + y = 4$.

6. Используя оператор Гамильтона ∇:

1. Вычислить $\mathrm{rot}[\bar{a},\bar{r}]$, $\bar{a}$ – постоянный вектор, $\bar{r}$ – радиус-вектор;
2. Доказать, что вектор $\bar{a} = u\,\mathrm{grad}v$ ортогонален к $\mathrm{rot}\,\bar{a}$;
3. Найти $\mathrm{grad}\mathrm{div}(u\bar{a})$;
4. Найти $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(u\bar{c})$, ($\bar{c}$ – постоянный вектор);
5. Найти $\mathrm{rot}(\bar{a}u)$;
6. Найти $\mathrm{div}(\bar{a}u)$;
7. Доказать справедливость формулы $\mathrm{rot}[\bar{a}\bar{b}] = \bar{a}\,\mathrm{div}\bar{b} - \bar{b}\,\mathrm{div}\bar{a} + (\bar{b}\nabla)\bar{a} - (\bar{a}\nabla)\bar{b}$;
8. Найти $\mathrm{div}f(r)\bar{r}$. Определить вид функции $f(r)$, для которой поле $f(r)\bar{r}$ является соленоидальным;
9. Найти $\mathrm{div}(r^5\bar{r})$;
10. Найти $\mathrm{div}(\bar{r}(\bar{r},\bar{a}))$, ($\bar{a}$ – постоянный вектор);
11. Найти $\mathrm{div}[\bar{a}[\bar{r}\bar{b}]]$, ($\bar{a}$, $\bar{b}$ – постоянные векторы);
12. Найти $\mathrm{grad}u$, если u(x, y) определяется неявно уравнением $u^3 - 3xyu = a^2$;
13. Вычислить $\mathrm{rot}[\bar{c}f(r)\bar{r}]$, ($\bar{c}$ – постоянный вектор);
14. Доказать справедливость формулы $(\bar{a}\nabla)u\bar{b} = \bar{b}(\bar{a}\nabla u) + u(\bar{a}\nabla)\bar{b}$;
15. Доказать справедливость формулы $(\bar{c}\nabla(\bar{a}\bar{b})) = (\bar{a}(\bar{c}\nabla)\bar{b}) + (\bar{b}(\bar{c}\nabla)\bar{a})$;
16. Доказать справедливость формулы $(\bar{c}\nabla)[\bar{a}\bar{b}] = [\bar{a}(\bar{c}\nabla)\bar{b}] - [\bar{b}(\bar{c}\nabla)\bar{a}]$;
17. Доказать справедливость формулы $([\bar{a}\bar{b}]\mathrm{rot}\,\bar{c}) = (\bar{b}(\nabla\bar{a})\bar{c}) - (\bar{a}(\bar{b}\nabla)\bar{c})$;
18. Найти $\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}v)$;
19. Найти $\mathrm{rot}[\bar{a}\,\mathrm{rot}\bar{b}]$;
20. Для векторного поля $\bar{a} = x^2y^2\bar{i} + y^2z^2\bar{j} + z^2x^2\bar{k}$ вычислить $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\bar{a}$, $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\bar{a}$;
21. Показать, что векторное поле $\bar{a} = \bar{i}e^x + \bar{j}e^y + \bar{k}e^z$ удовлетворяет уравнению $\bar{a} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\bar{a} = \bar{0}$;
22. Показать, что векторное поле $\bar{a} = \bar{i}e^y + \bar{j}e^z + \bar{k}e^x$ удовлетворяет уравнению $\bar{a} + \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\bar{a} = \vec{0}$;
23. Вычислить $(\bar{c}\nabla)\,\varphi(r)\,\bar{a}(r)$, ($\bar{c}$ – постоянный вектор);
24. Вычислить $(\bar{c}\nabla)\,\varphi(r)\,\bar{r}$, ($\bar{c}$ – постоянный вектор);
25. Найти $\Delta\bar{a}$, если $\bar{a} = x(y^2 + z^2)\bar{i} + y(x^2 + z^2)\bar{j} + z(x^2 + y^2)\bar{k}$;
26. Показать, что $\mathrm{rot}(f(r)\bar{a}) = \frac{\bar{f}(r)}{r}[\bar{r}\bar{a}]$, ($\bar{a}$ – постоянный вектор).

7. Найти циркуляцию векторного поля вдоль дуги С.

1. $\bar{F} = z^3\bar{i} + x^3\bar{j} + y^3\bar{k}$, $c = \{2x^2 + z^2 - y^2 = a^2, x + y = 0\}$;
2. $\bar{F} = y^2\bar{i} + xy\bar{j} + (x^2 + y^2)\bar{k}$, $c = \{x^2 + y^2 = az, x = 0, y = 0, z = 0, a > 0\}$;
3. $\bar{F} = ye^{xy}\bar{i} + xe^{xy}\bar{j} + xyz\bar{k}$, $c = \{x^2 + y^2 = 1 - z, x = 0, y = 0, z = 0\}$;
4. $\bar{F} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}$, $c = \{x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\}$;
5. $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $c = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0\}$;
6. $\bar{F} = y\bar{i} - 2z\bar{j} + x\bar{k}$, $c = \{2x^2 - y^2 + z^2 = a^2, x = y\}$;
7. $\bar{F} = x\bar{i} - y\bar{j}$, $c = \{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\}$;
8. $\bar{F} = (x + z)\bar{i} + (x - y)\bar{j} + x\bar{k}$, $c = \left\{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, z = 5\right\}$;
9. $\bar{F} = (x + 3y + 2z)\bar{i} + (2x + z)\bar{j} + (x - y)\bar{k}$, с – контур треугольника с вершинами A(2, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 1);
10. $\bar{F} = (x + y)\bar{i} + (x - z)\bar{j} + (y + z)\bar{k}$, с – контур треугольника с вершинами A(0, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 2);
11. $\bar{F} = (3x - 1)\bar{i} + (y - x + z)\bar{j} + 4z\bar{k}$, с – контур треугольника ABC, где A, B, C – точки пересечения плоскости $2x - y - 2z + 2 = 0$ соответствующими осями координат.
12. Найти работу поля $\bar{F} = 2xy\bar{i} + e^2\bar{j}$ вдоль наименьшей дуги окружности $x^2 + y^2 = 1$ от A(1, 0) до B(0, 1).
13. Найти работу поля $\bar{F} = 2xy\bar{i} + y^2\bar{j} - x^2\bar{k}$ вдоль части кривой $\{x^2 + y^2 - 2z^2 = 2, y = x\}$ от A(1, 1, 0) до B$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.
14. Найти работу поля $\bar{F}$ вдоль кратчайшей дуги эллипса $\{x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi\}$, от A(a, 0) до $B(0, b)$ если $\bar{F} = y\bar{i} + a\bar{j}$.
15. Найти работу поля $\bar{F} = xy\bar{i} + (x + y)\bar{j}$ вдоль кратчайшей дуги эллипса $\{x = 5\cos t, y = 9\sin t\}$от точки A(5, 0) до B(0, 9).
16. Найти работу силы $\bar{F}$, имеющей постоянную величину и направленной вдоль оси oy, вдоль кратчайшей дуги эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ от $A(a, 0)$ до $B(0, b)$.
17. Найти работу упругой силы, направленный к началу координат и пропорциональный удалению точки от начала координат вдоль кратчайшей дуги эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ от A(a, 0) до $B(0, b)$.
18. Под действием силы тяжести $\bar{g}$, направленной по оси oz тело единичный массы скатывается от точки $A(a, 0, 2\pi b)$ до точки $B(a, 0, 0)$ по спирали $\{x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi, z = b(2\pi - \varphi)\}$. Найти работу поля при таком перемещении.
19. Найти работу поля $\bar{F} = -yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$ вдоль первого витка винтовой линии $x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi, z = h\varphi (0 \le \varphi \le 2\pi)$.
20. Вычислить работу поля $\bar{F} = z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k}$ вдоль дуги OA кривой $\bar{r} = t\bar{i} + t^2\bar{j} + t^3\bar{k} (0 \le t \le 1)$.
21. Вычислить работу поля $\bar{F} = xy\bar{i} + y\bar{j} + (z - 1)^2\bar{k}$ вдоль отрезка винтовой линии $\bar{r}(t) = \cos t\bar{i} + \sin t\bar{j} + \dfrac{t}{\pi}\bar{k}$ от точки A(1, 0, 0) до B(1, 0, 2).

22. Найти работу силового поля $\bar{F} = y^2\bar{i} + 2xy\bar{j} + z\bar{k}$ вдоль отрезка линии пересечения цилиндров $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$, от точки A(-a, -a, 0) через точку C(0, 0, a) до точки B(a, a, 0).

23. Найти работу поля $\bar{F} = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}\bar{i} + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\bar{j} + 2\bar{k}$ вдоль окружности $\{x^2 + y^2 = R^2, z = 1\}$.

24. Найти работу поля $F = f(r)\bar{r}$ вдоль винтовой линии $\{x = 2\cos\varphi,\ y = 2\sin\varphi,\ z = 2\varphi\}$ от точки A(2, 0, 0) до точки $B(-2, 0, 2\pi)$.

25. Найти работу поля $\bar{F} = (z - x^2)\bar{i} + (x - y^2)\bar{j} + (y - z^2)\bar{k}$ вдоль треугольного контура $\{x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0\}$.

8. Потенциальные поля.

Проверить: потенциально ли векторное поле; если да, то найти потенциал.

1. $\bar{a} = 2xy\bar{i} + \left(x^2 + 1\right)\bar{j}$;
2. $\bar{a} = (y+1)\bar{i} + 2x(y+1)\bar{j}$;
3. $\bar{a} = \cos y\bar{i} - x\sin y\bar{j} + 2z\bar{k}$;
4. $\bar{a} = (yz+1)\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$;
5. $\bar{a} = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$;
6. $\bar{a} = \dfrac{\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}}{x + y + z}$;
7. $\bar{a} = e^x \sin y\bar{i} + e^x \cos y\bar{j} + \bar{k}$;
8. $\bar{a} = \left(\dfrac{1}{z} - \dfrac{y}{x^2}\right)\bar{i} + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{z}{y^2}\right)\bar{j} + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{z^2}\right)\bar{k}$;
9. $\bar{a} = yz(2x + y + z)\bar{i} + xz(x + 2y + z)\bar{j} + xy(x + y + 2z)\bar{k}$;
10. $\bar{a} = 2xyz\bar{i} + x^2z\bar{j} + x^2y\bar{k}$;
11. $\bar{a} = \dfrac{2}{\sqrt{y+z}}\bar{i} - \dfrac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}\bar{j} - \dfrac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}\bar{k}$;
12. $\bar{a} = 2xyz\bar{i} + x^2z\bar{j} + \left(x^2y + z\right)\bar{k}$;
13. $\bar{a} = yz\cos xy\bar{i} + xz\cos xy\bar{j} + \sin xy\bar{k}$;
14. $\bar{a} = \left(2xy + z^2\right)\bar{i} + \left(2yz + x^2\right)\bar{j} + \left(2xz + y^2\right)\bar{k}$;
15. $\bar{a} = \left(2xy + z\right)\bar{i} + \left(x^2 - 2y\right)\bar{j} + x\bar{k}$;
16. $\bar{a} = \dfrac{yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$;
17. $\bar{a} = \dfrac{\bar{r}}{r}$;
18. $\bar{a} = \dfrac{\bar{r}}{r^2}$;
19. $\bar{a} = r\bar{r}$;
20. $\bar{a} = y\bar{i} + x\bar{j} + e^z\bar{k}$;
21. $\bar{a} = e^x \sin y\bar{i} + e^x \cos y\bar{j} + (\sin xy)\bar{k}$;

22. $\bar{a} = ye^{xy}\bar{i} + xe^{xy}\bar{j} + \cos z\bar{k}$;

23. $\bar{a} = \left(\frac{1}{x+z} + yz\right)\bar{i} + xz\bar{j} + \left(\frac{1}{x+z} + xz\right)\bar{k}$;

24. $\bar{a} = \sin z\bar{i} - 2\sin z\bar{j} + [(x-2y+2z)\cos z + 2\sin z]\bar{k}$;

25. $\bar{a} = (2x^2y + z^3)\bar{i} + (3y^2z + x^3)\bar{j} + (3z^2x + y^3)\bar{k}$.

9. Соленоидальные поля.

Проверить: соленоидально ли векторное поле $\bar{a}$; если да, то найти векторный потенциал.

1. $\bar{a} = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$;
2. $\bar{a} = (6x+7yz)\bar{i} + (6y+7xz)\bar{j} + (6z+7xy)\bar{k}$;
3. $\bar{a} = 2y\bar{i} - z\bar{j} + 2x\bar{k}$;
4. $\bar{a} = x(z^2 - y^2)\bar{i} + y(x^2 - z^2)\bar{j} + z(y^2 - x^2)\bar{k}$;
5. $\bar{a} = y^2\bar{i} - (x^2 + y^3)\bar{j} + z(3y^2 + 1)\bar{k}$;
6. $\bar{a} = (1+2xy)\bar{i} - y^2z\bar{j} + (z^2y - 2zy + 1)\bar{k}$;
7. $\bar{a} = 6y^2\bar{i} + 6z\bar{j} + 6x\bar{k}$;
8. $\bar{a} = ye^{x^2}\bar{i} + 2yz\bar{j} - (2xyze^{x^2} + z^2)\bar{k}$;
9. $\bar{a} = (x-y)\bar{i} + y\bar{j} - x^2\bar{k}$;
10. $\bar{a} = (z-y)\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$;
11. $\bar{a} = 2y\bar{i} + 2z\bar{j}$;
12. $\bar{a} = 6y^2\bar{i} + 6z\bar{j} + 6x\bar{k}$;
13. $\bar{a} = 3y^2\bar{i} - x^2\bar{j} - (y^2 + 2x)\bar{k}$;
14. $\bar{a} = ye^x\bar{i} + 2yz\bar{j} - (2xyze^{x^2} + \xi)\bar{k}$;
15. $\bar{a} = (xz - e^x)\bar{i} - yz\bar{j} + (ze^x - e^x)\bar{k}$;
16. $\bar{a} = (z-1)\bar{i} + 2x^2z\bar{j} + \bar{k}$;
17. $\bar{a} = -\bar{i} + xy\bar{j} + (1 - xz)\bar{k}$;
18. $\bar{a} = -y\bar{i} - z\bar{j} - x\bar{k}$;
19. $\bar{a} = 2yz\bar{i} - 2xz\bar{j} - 2xy\bar{k}$;
20. $\bar{a} = y^2\bar{i} - z^2\bar{j} - x^2\bar{k}$;
21. $\bar{a} = z^2\bar{j} - x^2\bar{k}$;
22. $\bar{a} = x\cos z\bar{i} + (\sin y - z\cos x)\bar{j} - (\sin z + z\cos y)\bar{k}$;
23. $\bar{a} = (\sin y - \cos x)\bar{j} - (1 + z\cos y)\bar{k}$;
24. $\bar{a} = -e^x\bar{i} + (ye^z - e^z)\bar{j} + (ze^x - e^z)\bar{k}$;
25. $\bar{a} = ze^y\bar{i} + xe^z\bar{j}$.

10. Интегральные характеристики векторных полей.

1. Доказать, что поток постоянного векторного поля $\bar{a}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю.

2. Доказать, что объем области T внутри кусочно-гладкой поверхности $\sum$ можно вычислить по формуле $V_T = \frac{1}{3}\oiint(\bar{r}\bar{n})d\sigma$, где $\bar{r}$ – радиус-вектор, $\bar{n}$ – внешний единичный вектор к поверхности $\sum$.
3. Вывести формулу Грина как частный случай формулы Стокса для поля $\bar{a} = P(x,y)\bar{i} + Q(x,y)\bar{j}$ на плоскости.
4. Доказать, что циркуляция постоянного векторного поля $\bar{a}$ вдоль любого замкнутого кусочно-гладкого контура равно нулю.
5. Пусть векторное поле $\bar{a} = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$ задано в плоской области D, ограниченной кусочно-гладкой кривой L. Доказать, что $\iint\limits_D \operatorname{div}\bar{a}\, ds = \oint\limits_L (\bar{a}\,\bar{n})dl$, где $\bar{n}$ – внешняя нормаль к кривой L(это формула Грина).
6. Из формулы Грина получить формулу Ньютона-Лейбница.
7. Пусть скалярные поля u и v заданы в области T, ограниченный кусочно-гладкой поверхностью $\sum$. Доказать, что $\oiint\limits_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \iiint\limits_T (v\Delta u + \nabla u\ \nabla v)dv$ (первая формула Грина).
8. Пусть скалярные поля u и v заданы в области T, ограниченный кусочно-гладкой поверхностью $\sum$. Доказать, что $\oiint\limits_\Sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma = \iiint\limits_T (v\Delta u - u\Delta v)dv$ (вторая формула Грина).
9. Доказать, что поток векторного поля $\bar{a}$ через поверхность $\sum$, заданную уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u,v),\ (u,v) \in G$, в сторону нормали $\bar{N} = \left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right]$ может быть вычислен по формуле $\iint\limits_\Sigma (\bar{a},\bar{n})d\sigma = \iint\limits_G \left(\bar{a}\left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right]\right)dudv$, где $\bar{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|}$ – единичный вектор нормали к поверхности $\sum$.
10. Применяя формулу Остроградского-Гаусса к векторному полю $u(M)\bar{i}$, где $u(M)$ – скалярное поле в области G с границей $\sum$, доказать, что $\oiint\limits_\Sigma u\cos\alpha d\sigma = \iiint\limits_G \frac{\partial u}{\partial x}dv$, где α – угол между внешней нормалью $\bar{n}$ к поверхности $\sum$ и осью ox.
11. Применяя формулу Остроградского-Гаусса к векторным полям $u(M)\bar{i},\ u(M)\bar{j},\ u(M)\bar{k}$, где $u(M)$ – скалярное поле в области T, ограниченный поверхностью $\sum$, доказать, что $\oiint\limits_\Sigma u\bar{n}\,d\sigma = \oiint\limits_\Sigma \bar{n}u d\sigma = \iiint\limits_T \nabla u dv$, где $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности $\sum$.
12. Пусть векторное поле задано в области T, ограниченный поверхностью $\sum$, а $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности $\sum$. Доказать, что $\oiint\limits_\Sigma [\bar{n}\bar{a}]d\sigma = \iiint\limits_T [\nabla\bar{a}]dv$.
13. Доказать формулу $\oiint\limits_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \iiint\limits_T \Delta u dv$, где $\sum$ – гладкая поверхность, ограничивающая область T, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная скалярного поля по направлению внешней нормали к $\sum$, $\Delta u = (\nabla\nabla)u$.

14. Доказать формулу $\oiint\limits_{\Sigma} \varphi(\bar{a}\bar{n})d\sigma = \iiint\limits_{T} (\varphi\nabla\bar{a} + \bar{a}\nabla\varphi)dv$, где $\varphi = \varphi(M)$ – скалярное поле, Σ – поверхность, ограничивающая объём T, $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к Σ.
15. Доказать, что если u – гармоническая функция, то $\oiint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$, где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению нормали к кусочно-гладкой поверхности Σ.
16. Доказать, что если функция $U(M)$ является многочленом второй степени и Σ – кусочно-гладкая поверхность, то интеграл $\oiint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$ пропорционален объёму, ограниченному поверхностью Σ.
17. Пусть $\bar{a} = (P, Q, R)$, где P, Q, R – линейные функции x, y, z, и пусть C – замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в плоскости. Доказать, что если циркуляция $\oint\limits_{C} \bar{a}d\bar{r}$ отлично от нуля, то она пропорциональна площади фигуры, ограниченной контуром C.
18. Доказать тождество $\iiint\limits_{T} (\bar{a}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar{b} - \bar{b}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar{a})dv = \oiint\limits_{\Sigma} ([\bar{b}\,\mathrm{rot}\,\bar{a}] - [\bar{a}\,\mathrm{rot}\,\bar{b}])\bar{n}d\sigma$.
19. Доказать тождество $\iiint\limits_{T} (\mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{rot}\,\bar{a})dv = \oiint\limits_{\Sigma} [\bar{a}\,\mathrm{grad}\varphi]\bar{n}d\sigma$.
20. Вычислить интеграл $\oiint\limits_{\Sigma} \bar{r}(\bar{a}\bar{n})d\sigma$, где $\bar{a}$ – постоянный вектор, $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к Σ.
21. Интеграл по замкнутой поверхности $\oiint\limits_{\Sigma} [\bar{n}\bar{F}]d\sigma$ преобразовать в интеграл по объёму, заключенному внутри поверхности.
22. Интеграл $\oiint\limits_{\Sigma} (\bar{n}\bar{a})\bar{F}d\sigma$, где $\bar{a}$ – постоянный вектор, Σ преобразовать в интеграл по объёму, заключенному внутри поверхности.
23. Вычислить интеграл $\oiint\limits_{\Sigma} (\bar{a}\bar{r})\bar{n}d\sigma$, где $\bar{a}$ – постоянный вектор, $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности Σ.
24. Интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_{C} u\,d\bar{r}$ преобразовать в интеграл по поверхности, натянутый на этот контур.
25. Интеграл по замкнутому контуру $\oint\limits_{C} u\,dv$ преобразовать в интеграл по поверхности, натянутый на этот контур C (u, v – скалярные функции координат).

11. Найти векторные линии, дивергенцию, ротор векторного поля $\bar{a}$ в цилиндрических (1-13), сферических координатных (14-25).

1. $\bar{a} = \bar{e}_r + \varphi\bar{e}_\varphi$;
2. $\bar{a} = r\bar{e}_r + \varphi\bar{e}_\varphi + z\bar{e}_z$;
3. $\bar{a} = r^2\bar{e}_r + \bar{e}_z$;
4. $\bar{a} = \varphi\bar{e}_r + r^{2\bar{e}}l\varphi$;
5. $\bar{a} = \bar{e}_r + r\bar{e}_\varphi + \bar{e}_z$
6. $\bar{a} = z\bar{e}_r + r^2\bar{e}_\varphi + r\bar{e}_z$;

7. $\bar{a} = \bar{e}_r + \frac{1}{r}\bar{e}_\varphi + \bar{e}_z$;

8. $\bar{a} = r\bar{e}_r + \frac{\varphi}{r}\bar{e}_\varphi + z\bar{e}_z$;

9. $\bar{a} = \varphi z\bar{e}_r + z\bar{e}_\varphi + r\varphi\bar{e}_z$;

10. $\bar{a} = e^r \sin\varphi\bar{e}_r + \frac{e^r}{r}\cos\varphi\bar{e}_\varphi + 2z\sin\varphi\bar{e}_z$;

11. $\bar{a} = \varphi\cos z\bar{e}_r + \cos z\bar{e}_\varphi - r\sin z\bar{e}_z$;

12. $\bar{a} = r\bar{e}_r + re^{-\varphi}\bar{e}_\varphi + e^{\varphi}\cos z\bar{e}_z$;

13. $\bar{a} = r^2\bar{e}_r + 2\cos\varphi\bar{e}_\varphi + e^z\bar{e}_z$;

14. $\bar{a} = \bar{e}_r + r\bar{e}_\theta + r\bar{e}_\varphi$;

15. $\bar{a} = \frac{2\cos\theta}{r^2}\bar{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\bar{e}_\theta$;

16. $\bar{a} = \bar{e}_\theta + \sin\theta\bar{e}_\varphi$;

17. $\bar{a} = \frac{\cos\theta}{r}\bar{e}_r + r\sin\theta\bar{e}_\theta$;

18. $\bar{a} = \theta\bar{e}_r + r\bar{e}_\theta + r\sin\theta\bar{e}_\varphi$;

19. $\bar{a} = r\cos\theta\bar{e}_\theta + r\bar{e}_\varphi$;

20. $\bar{a} = r^2\bar{e}_r - 2\cos^2\theta\bar{e}_\theta$;

21. $\bar{a} = r^2\bar{e}_r + 2\cos\theta\bar{e}_\theta - \varphi\bar{e}_\varphi$;

22. $\bar{a} = r\bar{e}_r - r\sin\theta\bar{e}_\varphi$;

23. $\bar{a} = r\sin\frac{\varphi}{2}\bar{e}_\theta + r\sin\theta\cos\varphi\bar{e}_\varphi$;

24. $\bar{a} = r^2\bar{e}_r + \sin\theta\bar{e}_\varphi$;

25. $\bar{a} = r\bar{e}_r + r\sin\theta\bar{e}_\theta - 3r\varphi\sin\theta\bar{e}_\varphi$.

12. Вычислить градиент и лапласиан скалярного поля u в цилиндрических и сферических координатах.

1. $u = x^2yz$;
2. $u = x + y + z$;
3. $u = \sin(x + y + z)$;
4. $u = x^2 - y^2 + z$;
5. $u = y^2xz$;
6. $u = e^{x^2y}$;
7. $u = \ln(xyz)$;
8. $u = e^{\sqrt{xyz}}$;
9. $u = e^x + e^z$;
10. $u = -\frac{1}{x + y + z}$;
11. $u = \mathrm{arctg}(xz)$;
12. $u = \arcsin\frac{x}{y}$;

13. $u=\sqrt{xyz}$;
14. $u=\cos(x^2+y+z)$;
15. $u=x+\frac{1}{y}$;
16. $u=e^{-x^2-y^2+z^2}$;
17. $u=\ln(x^2+z^2)$;
18. $u=x^2y+z^2x$;
19. $u=\sqrt{x^2+y^2-z^2}$;
20. $u=x+\sin y$;
21. $u=x-\ln yz$;
22. $u=e^x+\ln z$;
23. $u=e^x-e^z$;
24. $u=\sin x+\ln z$;
25. $u=\cos y-\sin x$

5. Поток векторного поля.

1. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}=x^2\bar{i}+y^2\bar{j}+z^2\bar{k}$ через боковую поверхность конуса
   $x^2+y^2=z^2$, $0\le z\le h$ в сторону внешней нормали.
2. Вычислить поток вектора $\bar{r}$ через круг $x^2+y^2\le 4$, $z=2$ в сторону положительного направления оси OZ.
3. Вычислить поток постоянного вектора $\bar{a}$ через площадку, перпендикулярную оси OZ имеющую форму круга радиуса R с центром в точке M_0(0, 0, 3) в положительном направлении оси OZ.
4. Найти поток векторного поля $\bar{a}=(x-2z)\bar{i}+(x+3y+z)\bar{j}+(5x+y)\bar{k}$ через верхнюю сторону треугольной площадки с вершинами A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1).
5. Найти поток $\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}$ через часть поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, лежащую в первом октанте, в направлении внешней нормали.
6. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}=y\bar{i}+z\bar{j}+x\bar{k}$ через верхнюю сторону треугольной площадки с вершинами A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, a).
7. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}=z\bar{i}+x\bar{j}+y\bar{k}$ через верхнюю сторону круга, вырезаемого конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ на плоскости $z=h$ (h>0).
8. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}=3x\bar{i}-y\bar{j}-z\bar{k}$ через внешнюю сторону части параболоида $x^2+y^2=9-z$, расположенной в первом октанте.
9. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}=x\bar{i}+z\bar{k}$ через боковую поверхность кругового цилиндра $y=\sqrt{R^2-x^2}$, ограниченную плоскостями $z=0$, $z=h$ (h>0).
10. Вычислить поток векторного поля $\bar{a}=xz\bar{i}$ через внешнюю сторону параболоида $z=1-x^2-y^2$, ограниченную плоскостью $z=0$ $(z\ge 0)$.

Найти поток векторного поля $\bar{F}$ через $\sum$ в направлении внешней нормали.

11. $\bar{F}=(x^3+yz)\bar{i}+(y^3+xz)\bar{j}+(z^3+xy)\bar{k}$, $\sum=\{x^2+y^2+z^2=16,\ z\ge 0\}$;
12. $\bar{F}=(xy+x^2)\bar{i}+(2y-2xy)\bar{j}+(z-yz)\bar{k}$, $\sum=\{x^2+y^2=z^2,\ 0\le z\le h\}$;
13. $\bar{F}=(x-y+z)\bar{i}+(y-z+x)\bar{j}+(z-x+y)\bar{k}$, $\sum=\{|x|+|y|+|z|=1\}$;

14. $\bar{F} = 2x\bar{i} + 2y\bar{j} - z\bar{k}$, $\Sigma = \{z^2 = x^2 + y^2,\ 0 \le z \le h\}$;
15. $\bar{F} = 2x\bar{i} - y\bar{j} + z\bar{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 4,\ 3z \ge x^2 + y^2\}$;
16. $\bar{F} = x^2 y\bar{i} + xy^2\bar{j} + xyz\bar{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ \ x, y, z \ge 0\}$;
17. $\bar{F} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$, $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \le 0\}$;
18. $\bar{F} = y^2\bar{j} + z\bar{k}$, $\Sigma = \{z = x^2 + y^2,\ z \le 2\}$;
19. $\bar{F} = x\bar{i} - xy\bar{j} + z\bar{k}$, Σ – часть цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченная плоскостями $z = 0,\ x + z = R$;
20. $\bar{F} = xz\bar{i} + yz\bar{j} + z^2\bar{k}$, Σ – часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, отсеченная плоскостью $z = 2 (z \ge 2)$;
21. $\bar{F} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$, $\Sigma = \left\{x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{H^2} Z^2,\ 0 \le Z \le H\right\}$;
22. $\bar{F} = (3x - 1)\bar{i} + (y - x + z)\bar{j} + 4z\bar{k}$, Σ – поверхность призмы, образованной плоскостью $2x - y - 2z + 2 = 0$ и координатными плоскостями.
23.Найти поток вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через всю поверхность тела $\dfrac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \le Z \le H$ в направлении внешней нормали.

24. Вычислить поток радиуса вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ через боковую поверхность кругового цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, ограниченного плоскостями $x + y + z = 1$ и $x + y + z = 2$.
25. Найти поток векторного поля $\bar{a} = x\bar{i} - xy\bar{j} + z\bar{k}$ через внешнюю сторону цилиндрической поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченной плоскостями $y = 1$ и $x + y = 4$.

6. Используя оператор Гамильтона ∇:

Вычислить $\mathrm{rot}[\bar{a}, \bar{r}]$, $\bar{a}$ – постоянный вектор, $\bar{r}$ – радиус-вектор;
Доказать, что вектор $\bar{a} = u\,\mathrm{grad} v$ ортогонален к $\mathrm{rot}\,\bar{a}$;
Найти $\mathrm{grad\,div}(u\bar{a})$;
Найти $\mathrm{rot\,rot}(u\bar{c})$, ($\bar{c}$ – постоянный вектор);
Найти $\mathrm{rot}(\bar{a}u)$;
Найти $\mathrm{div}(\bar{a}u)$;
Доказать справедливость формулы $\mathrm{rot}[\bar{a}\bar{b}] = \bar{a}\,\mathrm{div}\bar{b} - \bar{b}\,\mathrm{div}\bar{a} + (\bar{b}\nabla)\bar{a} - (\bar{a}\nabla)\bar{b}$;
Найти $\mathrm{div} f(r)\bar{r}$. Определить вид функции $f(r)$, для которой поле $f(r)\bar{r}$ является соленоидальным;
Найти $\mathrm{div}(r^5\bar{r})$;
Найти $\mathrm{div}(\bar{r}(\bar{r}, \bar{a}))$, ($\bar{a}$ – постоянный вектор);
Найти $\mathrm{div}[\bar{a}[\bar{r}\bar{b}]]$, ($\bar{a}$, $\bar{b}$ – постоянные векторы);
Найти $\mathrm{grad} u$, если u(x, y) определяется неявно уравнением $u^3 - 3xyu = a^2$;
Вычислить $\mathrm{rot}[\bar{c} f(r)\bar{r}]$, ($\bar{c}$ – постоянный вектор);
Доказать справедливость формулы $(\bar{a}\nabla)u\bar{b} = \bar{b}(\bar{a}\nabla u) + u(\bar{a}\nabla)\bar{b}$;
Доказать справедливость формулы $(\bar{c}\nabla(\bar{a}\bar{b})) = (\bar{a}(\bar{c}\nabla)\bar{b}) + (\bar{b}(\bar{c}\nabla)\bar{a})$;
Доказать справедливость формулы $(\bar{c}\nabla)[\bar{a}\bar{b}] = [\bar{a}(\bar{c}\nabla)\bar{b}] - [\bar{b}(\bar{c}\nabla)\bar{a}]$;

Доказать справедливость формулы $([\bar a\bar b]\mathrm{rot}\,\bar c)=(\bar b(\nabla\bar a)\bar c)-(\bar a(\bar b\nabla)\bar c)$;
Найти $\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}\,v)$;
Найти $\mathrm{rot}[\bar a\,\mathrm{rot}\,\bar b]$;
Для векторного поля $\bar a=x^2y^2\bar i+y^2z^2\bar j+z^2x^2\bar k$ вычислить $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar a$, $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar a$;
Показать, что векторное поле $\bar a=\bar i e^x+\bar j e^y+\bar k e^z$ удовлетворяет уравнению $\bar a-\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar a=\vec 0$;
Показать, что векторное поле $\bar a=\bar i e^y+\bar j e^z+\bar k e^x$ удовлетворяет уравнению $\bar a+\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar a=\vec 0$;
Вычислить $(\bar c\nabla)\varphi(r)\bar a(r)$, ($\bar c$ – постоянный вектор);
Вычислить $(\bar c\nabla)\varphi(r)\bar r$, ($\bar c$ – постоянный вектор);
Найти $\Delta\bar a$, если $\bar a=x(y^2+z^2)\bar i+y(x^2+z^2)\bar j+z(x^2+y^2)\bar k$;
Показать, что $\mathrm{rot}(f(r)\bar a)=\dfrac{\bar f(r)}{r}[\bar r\bar a]$, ($\bar a$ – постоянный вектор).

7. Найти циркуляцию векторного поля вдоль дуги С.

1. $\bar F=z^3\bar i+x^3\bar j+y^3\bar k$, $c=\{2x^2+z^2-y^2=a^2, x+y=0\}$;
2. $\bar F=y^2\bar i+xy\bar j+(x^2+y^2)\bar k$, $c=\{x^2+y^2=az, x=0, y=0, z=0, a>0\}$;
3. $\bar F=ye^{xy}\bar i+xe^{xy}\bar j+xyz\bar k$, $c=\{x^2+y^2=1-z, x=0, y=0, z=0\}$;
4. $\bar F=xy\bar i+yz\bar j+xz\bar k$, $c=\{x^2+y^2=1, x+y+z=1\}$;
5. $\bar F=x\bar i+y\bar j+z\bar k$, $c=\{x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0\}$;
6. $\bar F=y\bar i-2z\bar j+x\bar k$, $c=\{2x^2-y^2+z^2=a^2, x=y\}$;
7. $\bar F=x\bar i-y\bar j$, $c=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2\}$;
8. $\bar F=(x+z)\bar i+(x-y)\bar j+x\bar k$, $c=\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, z=5\right\}$;
9. $\bar F=(x+3y+2z)\bar i+(2x+z)\bar j+(x-y)\bar k$, c – контур треугольника с вершинами A(2, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 1);
10. $\bar F=(x+y)\bar i+(x-z)\bar j+(y+z)\bar k$, c – контур треугольника с вершинами A(0, 0, 0), B(0, 1, 0),
 C(0, 0, 2);
11. $\bar F=(3x-1)\bar i+(y-x+z)\bar j+4z\bar k$, c – контур треугольника ABC, где A, B, C – точки пересечения плоскости $2x-y-2z+2=0$ соответствующими осями координат.
12. Найти работу поля $\bar F=2xy\bar i+e^2\bar j$ вдоль наименьшей дуги окружности $x^2+y^2=1$ от A(1, 0) до B(0, 1).
13. Найти работу поля $\bar F=2xy\bar i+y^2\bar j-x^2\bar k$ вдоль части кривой $\{x^2+y^2-2z^2=2, y=x\}$ от
 A(1, 1, 0) до $B(\sqrt2, \sqrt2, 1)$.
14. Найти работу поля $\bar F$ вдоль кратчайшей дуги эллипса $\{x=a\cos\varphi, y=b\sin\varphi\}$, от A(a, 0) до $B(0, b)$ если $\bar F=y\bar i+a\bar j$.
15. Найти работу поля $\bar F=xy\bar i+(x+y)\bar j$ вдоль кратчайшей дуги эллипса $\{x=5\cos t, y=9\sin t\}$от точки A(5, 0) до B(0, 9).
16. Найти работу силы $\bar F$, имеющей постоянную величину и направленной вдоль оси oy, вдоль кратчайшей дуги эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ от $A(a,0)$ до $B(0,b)$.

17. Найти работу упругой силы, направленный к началу координат и пропорциональный удалению точки от начала координат вдоль кратчайшей дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ от A(a, 0) до $B(0, b)$.

18. Под действием силы тяжести $\bar{g}$, направленной по оси oz тело единичный массы скатывается от точки $A(a, 0, 2\pi b)$ до точки $B(a, 0, 0)$ по спирали $\{x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi, z = b(2\pi-\varphi)\}$. Найти работу поля при таком перемещении.

19. Найти работу поля $\bar{F} = -yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$ вдоль первого витка винтовой линии $x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = h\varphi (0 \le \varphi \le 2\pi)$.

20. Вычислить работу поля $\bar{F} = z\bar{i} + x\bar{j} + y\bar{k}$ вдоль дуги OA кривой $\bar{r} = t\bar{i} + t^2\bar{j} + t^3\bar{k} (0 \le t \le 1)$.

21. Вычислить работу поля $\bar{F} = xy\bar{i} + y\bar{j} + (z-1)^2\bar{k}$ вдоль отрезка винтовой линии $\bar{r}(t) = \cos t\,\bar{i} + \sin t\,\bar{j} + \frac{t}{\pi}\bar{k}$ от точки A(1, 0, 0) до B(1, 0, 2).

22. Найти работу силового поля $\bar{F} = y^2\bar{i} + 2xy\bar{j} + z\bar{k}$ вдоль отрезка линии пересечения цилиндров $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$, от точки A(-a, -a, 0) через точку C(0, 0, a) до точки B(a, a, 0).

23. Найти работу поля $\bar{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\bar{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\bar{j} + 2\bar{k}$ вдоль окружности $\{x^2 + y^2 = R^2, z = 1\}$.

24. Найти работу поля $F = f(r)\bar{r}$ вдоль винтовой линии $\{x = 2\cos\varphi,\ y = 2\sin\varphi,\ z = 2\varphi\}$ от точки

A(2, 0, 0) до точки $B(-2, 0, 2\pi)$.

25. Найти работу поля $\bar{F} = (z - x^2)\bar{i} + (x - y^2)\bar{j} + (y - z^2)\bar{k}$ вдоль треугольного контура $\{x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0\}$.

8. Потенциальные поля.

Проверить: потенциально ли векторное поле; если да, то найти потенциал.

1. $\bar{a} = 2xy\bar{i} + (x^2+1)\bar{j}$;
2 $\bar{a} = (y+1)\bar{i} + 2x(y+1)\bar{j}$;
3 $\bar{a} = \cos y\,\bar{i} - x\sin y\,\bar{j} + 2z\bar{k}$;
4. $\bar{a} = (yz+1)\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}$;
5. $\bar{a} = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$;
6. $\bar{a} = \frac{\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}}{x+y+z}$;
7. $\bar{a} = e^x\sin y\,\bar{i} + e^x\cos y\,\bar{j} + \bar{k}$;
8. $\bar{a} = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2}\right)\bar{i} + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2}\right)\bar{j} + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2}\right)\bar{k}$;
9. $\bar{a} = yz(2x+y+z)\bar{i} + xz(x+2y+z)\bar{j} + xy(x+y+2z)\bar{k}$;
10. $\bar{a} = 2xyz\bar{i} + x^2z\bar{j} + x^2y\bar{k}$;

11. $\bar{a} = \dfrac{2}{\sqrt{y+z}}\bar{i} - \dfrac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}\bar{j} - \dfrac{x}{\sqrt{(y+z)^3}}\bar{k}$;

12. $\bar{a} = 2xyz\bar{i} + x^2z\bar{j} + \left(x^2y + z\right)\bar{k}$;

13. $\bar{a} = yz\cos xy\bar{i} + xz\cos xy\bar{j} + \sin xy\bar{k}$;

14. $\bar{a} = \left(2xy + z^2\right)\bar{i} + \left(2yz + x^2\right)\bar{j} + \left(2xz + y^2\right)\bar{k}$;

15. $\bar{a} = \left(2xy + z\right)\bar{i} + \left(x^2 - 2y\right)\bar{j} + x\bar{k}$;

16. $\bar{a} = \dfrac{yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k}}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$;

17. $\bar{a} = \dfrac{\bar{r}}{r}$;

18. $\bar{a} = \dfrac{\bar{r}}{r^2}$;

19. $\bar{a} = r\bar{r}$;

20. $\bar{a} = y\bar{i} + x\bar{j} + e^z\bar{k}$;

21. $\bar{a} = e^x \sin y\bar{i} + e^x \cos y\bar{j} + (\sin xy)\bar{k}$;

22. $\bar{a} = ye^{xy}\bar{i} + xe^{xy}\bar{j} + \cos z\bar{k}$;

23. $\bar{a} = \left(\dfrac{1}{x+z} + yz\right)\bar{i} + xz\bar{j} + \left(\dfrac{1}{x+z} + xz\right)\bar{k}$;

24. $\bar{a} = \sin z\bar{i} - 2\sin z\bar{j} + \left[(x - 2y + 2z)\cos z + 2\sin z\right]\bar{k}$;

25. $\bar{a} = \left(2x^2y + z^3\right)\bar{i} + \left(3y^2z + x^3\right)\bar{j} + \left(3z^2x + y^3\right)\bar{k}$.

9. Соленоидальные поля.

Проверить: соленоидально ли векторное поле $\bar{a}$; если да, то найти векторный потенциал.

1. $\bar{a} = (y+z)\bar{i} + (x+z)\bar{j} + (x+y)\bar{k}$;
2. $\bar{a} = (6x + 7yz)\bar{i} + (6y + 7xz)\bar{j} + (6z + 7xy)\bar{k}$;
3. $\bar{a} = 2y\bar{i} - z\bar{j} + 2x\bar{k}$;
4. $\bar{a} = x\left(z^2 - y^2\right)\bar{i} + y\left(x^2 - z^2\right)\bar{j} + z\left(y^2 - x^2\right)\bar{k}$;
5. $\bar{a} = y^2\bar{i} - \left(x^2 + y^3\right)\bar{j} + z\left(3y^2 + 1\right)\bar{k}$;
6. $\bar{a} = (1 + 2xy)\bar{i} - y^2z\bar{j} + \left(z^2y - 2zy + 1\right)\bar{k}$;
7. $\bar{a} = 6y^2\bar{i} + 6z\bar{j} + 6x\bar{k}$;
8. $\bar{a} = ye^{x^2}\bar{i} + 2yz\bar{j} - \left(2xyze^{x^2} + z^2\right)\bar{k}$;
9. $\bar{a} = (x - y)\bar{i} + y\bar{j} - x^2\bar{k}$;
10. $\bar{a} = (z - y)\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$;
11. $\bar{a} = 2y\bar{i} + 2z\bar{j}$;
12. $\bar{a} = 6y^2\bar{i} + 6z\bar{j} + 6x\bar{k}$;
13. $\bar{a} = 3y^2\bar{i} - x^2\bar{j} - \left(y^2 + 2x\right)\bar{k}$;
14. $\bar{a} = ye^x\bar{i} + 2yz\bar{j} - \left(2xyze^{x^2} + \xi\right)\bar{k}$;
15. $\bar{a} = \left(xz - e^x\right)\bar{i} - yz\bar{j} + \left(ze^x - e^x\right)\bar{k}$;
16. $\bar{a} = (z - 1)\bar{i} + 2x^2z\bar{j} + \bar{k}$;
17. $\bar{a} = -\bar{i} + xy\bar{j} + (1 - xz)\bar{k}$;
18. $\bar{a} = -y\bar{i} - z\bar{j} - x\bar{k}$;

19. $\bar{a} = 2yz\bar{i} - 2xz\bar{j} - 2xy\bar{k}$;
20. $\bar{a} = y^2\bar{i} - z^2\bar{j} - x^2\bar{k}$;
21. $\bar{a} = z^2\bar{j} - x^2\bar{k}$;
22. $\bar{a} = x\cos z\bar{i} + (\sin y - z\cos x)\bar{j} - (\sin z + z\cos y)\bar{k}$;
23. $\bar{a} = (\sin y - \cos x)\bar{j} - (1 + z\cos y)\bar{k}$;
24. $\bar{a} = -e^x\bar{i} + \left(ye^z - e^z\right)\bar{j} + \left(ze^x - e^z\right)\bar{k}$;
25. $\bar{a} = ze^y\bar{i} + xe^z\bar{j}$.

10. Интегральные характеристики векторных полей.

Доказать, что поток постоянного векторного поля $\bar{a}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Доказать, что объем области T внутри кусочно-гладкой поверхности Σ можно вычислить по формуле $V_T = \frac{1}{3}\oiint\left(\bar{r}\bar{n}\right)d\sigma$, где $\bar{r}$ – радиус-вектор, $\bar{n}$ – внешний единичный вектор к поверхности Σ.

Вывести формулу Грина как частный случай формулы Стокса для поля $\bar{a} = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$ на плоскости.

Доказать, что циркуляция постоянного векторного поля $\bar{a}$ вдоль любого замкнутого кусочно-гладкого контура равно нулю.

Пусть векторное поле $\bar{a} = P(x,\ y)\bar{i} + Q(x,\ y)\bar{j}$ задать в плоской области D, ограниченной кусочно-гладкой кривой L. Доказать, что $\iint\limits_D \operatorname{div}\bar{a}\,ds = \oint\limits_L\left(\bar{a}\,\bar{n}\right)dl$, где $\bar{n}$ – внешняя нормаль к кривой L(это формула Грина).

Из формулы Грина получить формулу Ньютона-Лейбница.

Пусть скалярные поля u и v заданы в области T, ограниченный кусочно-гладкой поверхностью Σ. Доказать, что $\oiint\limits_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \iiint\limits_T\left(v\Delta u + \nabla u\ \nabla v\right)dv$ (первая формула Грина).

Пусть скалярные поля u и v заданы в области T, ограниченный кусочно-гладкой поверхностью Σ. Доказать, что $\oiint\limits_\Sigma\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma = \iiint\limits_T\left(v\Delta u - u\Delta v\right)dv$ (вторая формула Грина).

Доказать, что поток векторного поля $\bar{a}$ через поверхность Σ, заданную уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v),\ (u, v) \in G$, в сторону нормали $\bar{N} = \left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right]$ может быть вычислен по формуле $\iint\limits_\Sigma\left(\bar{a}, \bar{n}\right)d\sigma = \iint\limits_G\left(\bar{a}\left[\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}, \frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right]\right)dudv$, где $\bar{n} = \frac{\bar{N}}{\left|\bar{N}\right|}$ – единичный вектор нормали к поверхности Σ.

10. Применяя формулу Остраграденого-Гаусса к векторному полю $u\left(M\right)\bar{i}$, где $u\left(M\right)$ – скалярное поле в области G с границей Σ, доказать, что $\oiint\limits_\Sigma u\cos\alpha d\sigma = \iiint\limits_G\frac{\partial u}{\partial x}dv$, где α – угол между внешней нормалью $\bar{n}$ к поверхности Σ и осью ох.

11. Применяя формулу Острограденого-Гаусса к векторным полям $u\left(M\right)\bar{i},\ u\left(M\right)\bar{j},\ u\left(M\right)\bar{k}$, где $u\left(M\right)$ – скалярное поле в области T, ограниченный поверхностью Σ, доказать, что

$\oint\!\!\oint_{\Sigma} u\bar{n}\,d\sigma = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \bar{n}u\,d\sigma = \iiint_{T} \nabla u\,dv$, где $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ.

12. Пусть векторное поле задано в области T, ограниченный поверхностью Σ, а $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ. Доказать, что $\oint\!\!\oint_{\Sigma} [\bar{n}\bar{a}]d\sigma = \iiint_{T} [\nabla\bar{a}]dv$.

13. Доказать формулу $\oint\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \iiint_{T} \Delta u\,dv$, где Σ – гладкая поверхность, ограничивающая область T, $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная скалярного поля по направлению внешней нормали к Σ, $\Delta u = (\nabla\nabla)u$.

14. Доказать формулу $\oint\!\!\oint_{\Sigma} \varphi(\bar{a}\bar{n})d\sigma = \iiint_{T} (\varphi\nabla\bar{a} + \bar{a}\nabla\varphi)dv$, где $\varphi = \varphi(M)$ – скалярное поле, Σ – поверхность, ограничивающая объём T, $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к Σ.

15. Доказать, что если u – гармоническая функция, то $\oint\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = 0$, где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению нормали к кусочно-гладкой поверхности Σ.

16. Доказать, что если функция $U(M)$ является многочленом второй степени и Σ – кусочно-гладкая поверхность, то интеграл $\oint\!\!\oint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$ пропорционален объёму, ограниченному поверхностью Σ.

17. Пусть $\bar{a} = (P, Q, R)$, где P, Q, R – линейные функции x, y, z, и пусть C – замкнутая кусочно-гладкая кривая, расположенная в плоскости. Доказать, что если циркуляция $\oint_{C} \bar{a}d\bar{r}$ отлично от нуля, то она пропорциональна площади фигуры, ограниченной контуром C.

18. Доказать тождество $\iiint_{T} (\bar{a}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\bar{b} - \bar{b}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\bar{a}) = \oint\!\!\oint_{\Sigma} ([\bar{b}\,\mathrm{rot}\bar{a}] - [\bar{a}\,\mathrm{rot}\bar{b}])\bar{n}d\sigma$.

19. Доказать тождество $\iiint_{T} (\mathrm{grad}\varphi \cdot \mathrm{rot}\bar{a})dv = \oint\!\!\oint_{\Sigma} [\bar{a}\,\mathrm{grad}\varphi]\bar{n}d\sigma$.

20. Вычислить интеграл $\oint\!\!\oint_{\Sigma} \bar{r}(\bar{a}\bar{n})d\sigma$, где $\bar{a}$ – постоянный вектор, $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к Σ.

21. Интеграл по замкнутой поверхности $\oint\!\!\oint_{\Sigma} [\bar{n}\bar{F}]d\sigma$ преобразовать в интеграл по объёму, заключенному внутри поверхности.

22 Интеграл $\oint\!\!\oint_{\Sigma} (\bar{n}\bar{a})\bar{F}d\sigma$, где $\bar{a}$ – постоянный вектор, Σ преобразовать в интеграл по объёму, заключенному внутри поверхности.

23. Вычислить интеграл $\oint\!\!\oint_{\Sigma} (\bar{a}\bar{r})\bar{n}d\sigma$, где $\bar{a}$ – постоянный вектор, $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности Σ.

24. Интеграл по замкнутому контуру $\oint_{C} u\,d\bar{r}$ преобразовать в интеграл по поверхности, натянутый на этот контур.

25. Интеграл по замкнутому контуру $\oint_{C} u\,dv$ преобразовать в интеграл по поверхности, натянутый на этот контур C (u, v – скалярные функции координат).

11. Найти векторные линии, дивергенцию, ротор векторного поля $\bar{a}$ в цилиндрических (1-13), сферических координатных (14-25).

1. $\bar{a} = \bar{e}_r + \varphi\bar{e}_\varphi$;
2. $\bar{a} = r\bar{e}_r + \varphi\bar{e}_\varphi + z\bar{e}_z$;
3. $\bar{a} = r^2\bar{e}_r + \bar{e}_z$;
4. $\bar{a} = \varphi\bar{e}_r + r^{2\bar{e}} l\varphi$;
5. $\bar{a} = \bar{e}_r + r\bar{e}_\varphi + \bar{e}_z$
6. $\bar{a} = z\bar{e}_r + r^2\bar{e}_\varphi + r\bar{e}_z$;
7. $\bar{a} = \bar{e}_r + \frac{1}{r}\bar{e}_\varphi + \bar{e}_z$;
8. $\bar{a} = r\bar{e}_r + \frac{\varphi}{r}\bar{e}_\varphi + z\bar{e}_z$;
9. $\bar{a} = \varphi z\bar{e}_r + z\bar{e}_\varphi + r\varphi\bar{e}_z$;
10. $\bar{a} = e^r \sin\varphi\bar{e}_r + \frac{e^r}{r}\cos\varphi\bar{e}_\varphi + 2z\sin\varphi\bar{e}_z$;
11. $\bar{a} = \varphi\cos z\bar{e}_r + \cos z\bar{e}_\varphi - r\sin z\bar{e}_z$;
12. $\bar{a} = r\bar{e}_r + re^{-\varphi}\bar{e}_\varphi + e^\varphi\cos z\bar{e}_z$;
13. $\bar{a} = r^2\bar{e}_r + 2\cos\varphi\bar{e}_\varphi + e^z\bar{e}_z$;
14. $\bar{a} = \bar{e}_r + r\bar{e}_\theta + r\bar{e}_\varphi$;
15. $\bar{a} = \frac{2\cos\theta}{r^2}\bar{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\bar{e}_\theta$;
16. $\bar{a} = \bar{e}_\theta + \sin\theta\bar{e}_\varphi$;
17. $\bar{a} = \frac{\cos\theta}{r}\bar{e}_r + r\sin\theta\bar{e}_\theta$;
18. $\bar{a} = \theta\bar{e}_r + r\bar{e}_\theta + r\sin\theta\bar{e}_\varphi$;
19. $\bar{a} = r\cos\theta\bar{e}_\theta + r\bar{e}_\varphi$;
20. $\bar{a} = r^2\bar{e}_r - 2\cos^2\theta\bar{e}_\theta$;
21. $\bar{a} = r^2\bar{e}_r + 2\cos\theta\bar{e}_\theta - \varphi\bar{e}_\varphi$;
22. $\bar{a} = r\bar{e}_r - r\sin\theta\bar{e}_\varphi$;
23. $\bar{a} = r\sin\frac{\varphi}{2}\bar{e}_\theta + r\sin\theta\cos\varphi\bar{e}_\varphi$;
24. $\bar{a} = r^2\bar{e}_r + \sin\theta\bar{e}_\varphi$;
25. $\bar{a} = r\bar{e}_r + r\sin\theta\bar{e}_\theta - 3r\varphi\sin\theta\bar{e}_\varphi$.

12. Вычислить градиент и лапласиан скалярного поля u в цилиндрических и сферических координатах.

1. $u = x^2yz$;
2. $u = x + y + z$;

3. $u = \sin(x + y + z)$;

4. $u = x^2 - y^2 + z$;

5. $u = y^2 xz$;

6. $u = e^{x^2 y}$;

7. $u = \ln(xyz)$;

8. $u = e^{\sqrt{xyz}}$;

9. $u = e^x + e^z$;

10. $u = -\dfrac{1}{x + y + z}$;

11. $u = \operatorname{arctg}(xz)$;

12. $u = \arcsin\dfrac{x}{y}$;

13. $u = \sqrt{xyz}$;

14. $u = \cos\left(x^2 + y + z\right)$;

15. $u = x + \dfrac{1}{y}$;

16. $u = e^{-x^2 - y^2 + z^2}$;

17. $u = \ln\left(x^2 + z^2\right)$;

18. $u = x^2 y + z^2 x$;

19. $u = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$;

20. $u = x + \sin y$;

21. $u = x - \ln yz$;

22. $u = e^x + \ln z$;

23. $u = e^x - e^z$;

24. $u = \sin x + \ln z$;

25. $u = \cos y - \sin x$.