

Казанский государственный университет
им. В.И.Ульянова-Ленина

Физический факультет

А.Б. БАЛАКИН

КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ТЕОРИИ
ГРАВИТАЦИИ

Учебно - методическое пособие к курсу

Экспериментальные обоснования
общей теории относительности

Конспект лекций

Казанский государственный университет
2010

УДК 537.8

Печатается по решению Редакционно - издательского совета
ГОУ ВПО

”Казанский государственный университет
им. В.И. Ульянова - Ленина”

методической комиссии физического факультета

Протокол N 1 от 16 февраля 2010 г.

заседания кафедры теории относительности и гравитации

Протокол N 2 от 12 февраля 2010 г.

Рецензент:

доктор физ.-мат. наук, проф. ТГГПУ Ю.Г. Игнатъев

А.Б. Балакин

Классические тесты теории гравитации: Учебно - методическое пособие / А.Б. Балакин. - Казань: Казанский государственный университет, 2010. - 20 с., 15 рис.

Предназначено для студентов и аспирантов физического факультета Казанского государственного университета.

©Казанский государственный университет, 2010

©Балакин А.Б., 2010

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для чтения спецкурса Экспериментальные обоснования общей теории относительности (ЭООТО), включенного в программу обучения студентов кафедры теории относительности и гравитации, выделено 17 лекций. Оценивая объём, специфику и сложность материала спецкурса, а также учитывая динамику развития экспериментальных исследований в области гравитации, автор уверен, что 34 часа аудиторных занятий должны быть дополнены как минимум 102 часами самостоятельной работы. Самостоятельная работа студентов лишь частично обеспечена учебной литературой. В библиотеке КГУ имеется два классических учебника, переведенных на русский язык: это книги С.Вайнберга [1] и К.М.Уилла [2], сборники статей [3,4] с тематическими обзорами И.Шапиро, Э.Амальди и Г.Пиццелла, К.М.Уилла, а также монография И.Бичака и В.Н.Руденко по детектированию гравитационных волн [5]. Клиффорд Уилл неоднократно дополнял материал своей книги, публикуя в журналах и интернет-изданиях обзоры современного состояния экспериментальной гравитации, последний из них доступен на сайте [6]. Если же говорить о более специализированных обзорах по различным разделам экспериментальной гравитации, то они появляются в журналах и архиве препринтов (<http://arxiv.org>) практически ежемесячно. Самостоятельно разобраться в громадном объёме информации студенты не в состоянии, и потому автор видит единственный выход из положения: подготовить серию методических пособий, которые помогли бы заинтересованному читателю ускоренно ознакомиться с классическими экспериментальными фактами и их математическим описанием. В этом случае время аудиторных занятий может быть использовано для дискуссий об актуальных проблемах и достижениях в теории гравитации.

Современные исследования в области экспериментальной гравитации условно разделяются на пять больших групп. К первой группе проблем следует отнести, во-первых, проверку слабого и сильного принципов эквивалентности Эйнштейна, во-вторых, проверку локальной Лоренц - инвариантности законов природы, в третьих, проверку закона обратных квадра-

тов $1/r^2$ и гипотез о модификации закона тяготения для малых и больших расстояний, в-четвертых, уточнение значения ньютоновской гравитационной постоянной G и её производной по времени \dot{G} . Вторая группа проблем ассоциируется с целым комплексом экспериментов в пост-ньютоновской теории гравитации, в частности, с экспериментами по обнаружению гравимагнитной составляющей поля тяготения и тестированию эффекта Лензе-Тирринга. К третьей группе относятся эксперименты по детектированию гравитационного излучения, и эта тематика настолько обширна, что заслуживает выделения в особый спецкурс. Четвертая группа экспериментальных исследований сосредоточена вокруг эффектов в сильных гравитационных полях, сюда, в частности, включены наблюдения за релятивистскими двойными пульсарами и сверхмассивными черными дырами. Пятая группа проблем ассоциируется с космологическими исследованиями, в частности, с гравитационным линзированием, поиском темной материи и изучением свойств реликтового излучения.

Главная задача спецкурса ЭООТО - привлечь студентов к изучению того математического базиса, на котором строится интерпретация гравитационных экспериментов и предсказательная часть многочисленных проектов в теории тяготения. На уровень теоретической проработки любого экспериментального проекта в этой области науки накладываются беспрецедентно жёсткие требования, так что строгость математических выкладок и ответственность интерпретации в данном случае играют особо важную роль.

В планы автора входит подготовка трех методических пособий по курсу ЭООТО. Предлагаемое вниманию читателя пособие - первое из них, оно включает вопросы динамики релятивистских частиц в сферически симметричных гравитационных полях, составляющие математическую основу для четырех классических тестов теории гравитации: красного смещения, запаздывания радарного эха, отклонения лучей света в гравитационном поле Солнца и смещения перигелия Меркурия. Экспериментальные результаты в тексте не обсуждаются, их описание можно найти в цитированных источниках. В приложении читатель найдет некий иллюстративный материал, цель которого - усилить интерес к обсуждаемому предмету.

1. ДВИЖЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В СТАТИЧЕСКОМ ЦЕНТРАЛЬНО - СИММЕТРИЧНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

1.1. Уравнения геодезических линий

В рамках тензорной теории тяготения гравитационное поле статического сферически симметричного объекта, обладающего центром (мы не рассматриваем здесь объекты с топологическими особенностями), описывается пространственно - временным интервалом [1]

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) . \quad (1)$$

Метрические коэффициенты $g_{tt} = B(r)$ и $g_{rr} = -A(r)$ считаются функциями только одной переменной - радиальной координаты r . В уравнениях геодезической линии

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau} = 0 \quad (2)$$

латинские индексы пробегают значения $i = t, i = r, i = \theta, i = \varphi$, нумеруя, соответственно, временную, радиальную координаты, меридиональный и азимутальный углы. Следуя книге [1], мы полагаем, что скорость света в вакууме c включена в определение t в качестве внутреннего размерного множителя. Величина τ - это параметр вдоль траектории, он может отличаться от интервала s постоянным множителем. Символы Кристоффеля

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{ij} \left[\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} \right] \quad (3)$$

симметричны, $\Gamma_{km}^i = \Gamma_{mk}^i$. Для уравнений геодезических линий удобно использовать эквивалентную запись

$$\frac{DU^i}{d\tau} = 0, \quad U^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad (4)$$

где ковариантный дифференциал D четырехвектора скорости частицы U^i определен следующим образом

$$\frac{DU^i}{d\tau} = \frac{dU^i}{d\tau} + \Gamma_{kl}^i U^k U^l . \quad (5)$$

Независимо от симметрии пространства - времени уравнения (2) допускают квадратичный интеграл движения

$$g_{ik}U^iU^k = g_{ik} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = const = E^2, \quad (6)$$

который легко обнаружить, проделав следующую операцию:

$$U^i \frac{DU_i}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{D}{d\tau} (U^i U_i) = 0. \quad (7)$$

Параметр вдоль траектории τ и интервал s согласно (6) связаны равенством $ds^2 = E^2 d\tau^2$. Будем считать, что для массивных частиц $E^2 = 1$, $s = \tau$ и четыре-скорость частицы нормирована на единицу, то есть, $U_i U^i = 1$. Для безмассовых частиц $E = 0$ и четыре-вектор U^i изотропен, то есть, его квадрат равен нулю, $U_i U^i = 0$.

1.2. Интегралы движения

Для поиска двух первых интегралов движения в (4) удобно перейти к ковариантной компоненте $U_i = g_{ik}U^k$ и преобразовать данное уравнение к виду

$$\frac{dU_i}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} U^k U^l. \quad (8)$$

Поскольку метрика не зависит от времени t , после подстановки значения индекса $i = t$ в это уравнение получим

$$\frac{dU_t}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_t \equiv B(r) \frac{dt}{d\tau} = K. \quad (9)$$

Константа K определяет, таким образом, первый интеграл движения, устанавливающий связь координатного и собственного времени

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{K}{B(r)}. \quad (10)$$

Константа K по-разному определяется для замкнутых и неограниченных орбит, а также для массивных и безмассовых частиц, ниже мы остановимся на определении этой величины.

Если в уравнении (8) положить $i = \varphi$, то поскольку метрика не зависит от азимутального угла, получим еще один - *азимутальный интеграл движения*

$$\frac{dU_\varphi}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_\varphi \equiv -r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} = -J. \quad (11)$$

Константа J имеет смысл азимутального момента импульса частицы, который сохраняется при движении, как и в классической механике. Для производной от азимутального угла получаем формулу

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{J}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (12)$$

Для получения *меридионального интеграла движения* обратимся к уравнению (2) и подставим значение индекса $i = \theta$. Поскольку только два символа Кристоффеля с верхним индексом θ отличны от нуля:

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \quad (13)$$

уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right) \left(\frac{dr}{d\tau} \right) - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (14)$$

Если это уравнение умножить на $2r^4 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)$ и исключить $\left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2$ с помощью (12), то полученное уравнение

$$2r^4 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right) \frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 4r^3 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{dr}{d\tau} \right) - 2J^2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right) = 0 \quad (15)$$

можно записать как равенство нулю полной производной

$$\frac{d}{d\tau} \left[r^4 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \frac{J^2}{\sin^2 \theta} \right] = 0. \quad (16)$$

Это означает, что сохраняется полный угловой момент частицы

$$L^2 = const = r^4 \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right], \quad (17)$$

а производная от меридионального угла представляется следующей функцией

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 = \frac{L^2 \sin^2 \theta - J^2}{r^4 \sin^2 \theta}. \quad (18)$$

При заданных значениях J и L , удовлетворяющих соотношению $J^2 \leq L^2$, движение частицы может осуществляться только в области, в которой меридиональный угол удовлетворяет неравенству

$$\sin^2 \theta \geq \frac{J^2}{L^2}. \quad (19)$$

В предельном случае $J^2 = L^2$ получим, что $\theta = \frac{\pi}{2}$, то есть, частица движется в экваториальной плоскости. Если перейти к угловой переменной Ψ , заданной по правилу

$$d\Psi \equiv \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2}, \quad (20)$$

то эволюция этой величины определяется уравнением

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}. \quad (21)$$

Радиальный интеграл движения получается из уравнения (2), записанного для $i = r$. Учитывая тот факт, что только четыре символа Кристоффеля с верхним индексом r отличны от нуля для данной метрики:

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{B'(r)}{2B}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{A'(r)}{2A}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r}{A} \sin^2 \theta, \quad (22)$$

получим уравнение для радиальной переменной

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{A'}{2A} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2A} \left\{ B' \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 2r \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] \right\} = 0. \quad (23)$$

Здесь и далее штрих обозначает производную по r . Если умножить уравнение (23) на $2A \left(\frac{dr}{d\tau} \right)$, то результат можно записать как равенство нулю полной производной

$$\frac{d}{d\tau} \left[A \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{K^2}{B} + \frac{L^2}{r^2} \right] = 0. \quad (24)$$

Отсюда получим радиальный интеграл движения

$$A \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{K^2}{B} + \frac{L^2}{r^2} = \text{const} = -E^2. \quad (25)$$

Константа интегрирования оказывается не произвольной: в силу соотношения

$$\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = B \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - A \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left[\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{K^2}{B} - A \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} = E^2 \quad (26)$$

она совпадает с константой $-E^2$, введенной ранее. Таким образом, можно заключить, что соотношения (10), (12), (17), (25) дают четыре первые интеграла движения, а константы K , J , L и E ассоциированы с ними.

1.3. Годограф релятивистской частицы

Термин годограф применяется в том случае, если мы ищем расстояние от центра, меридиональный и азимутальный углы как функции координатного времени: $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$. Эти функции могут быть предъявлены с помощью системы квадратур. В качестве первого шага дифференциал $d\tau$ заменяется на $d\tau = dt \frac{B(r)}{K}$ в силу соотношения (10) и подставляется в уравнение (25). Результат следует записать в виде

$$\frac{dr}{dt} = \pm \frac{B}{K} \sqrt{\frac{1}{A} \left[\frac{K^2}{B} - \frac{L^2}{r^2} - E^2 \right]}, \quad (27)$$

разделить переменные и проинтегрировать. Квадратура

$$t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r dr \frac{\sqrt{A(r)}}{B(r)} \left[\frac{1}{B} - \frac{L^2}{r^2 K^2} - \frac{E^2}{K^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (28)$$

в неявном виде задает $r(t)$, если функции $B(r)$ и $A(r)$ известны.

Для того, чтобы обнаружить зависимость $\theta(t)$ при найденной функции $r(t)$, следует в уравнении (18) воспользоваться формулой $d\tau = dt \frac{B(r)}{K}$ и заменить переменную r на функцию $r(t)$. Интегрирование полученного уравнения дает закон эволюции меридионального угла

$$\cos \theta(t) = \sqrt{1 - \frac{J^2}{L^2}} \sin \left\{ \arcsin \left[\frac{\cos \theta(t_0)}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{L^2}}} \right] \pm \frac{L}{K} \int_{t_0}^t \frac{dt B(r(t))}{r^2(t)} \right\}. \quad (29)$$

Если нас интересует зависимость азимутального угла от времени $\varphi(t)$, необходимо воспользоваться формальной квадратурой

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{J}{K} \int_{t_0}^t dt \frac{B(r(t))}{r^2(t) \sin^2 \theta(t)}, \quad (30)$$

в которой $r(t)$ задается соотношением (28), а $\theta(t)$ - соотношением (29).

1.4. Траектория движения релятивистской частицы

Когда мы говорим об уравнении траектории частицы, то предполагаем, что из этого уравнения исключены параметр τ и время t . При проведении такой процедуры становится понятным, что траектория релятивистской частицы является плоской. Чтобы доказать это, воспользуемся допустимым ортогональным поворотом сферической системы координат, то есть, перейдём от углов θ и φ к новому азимутальному углу Ψ по формуле (20) и соответствующему меридиональному углу Θ . Поскольку радиальный интеграл движения (25) не содержит угловых переменных, а $d\tau$ с помощью (21) может быть выражено только через $d\Psi$ и r , можно заключить, что новый меридиональный угол является циклической переменной, а зависимость нового азимутального угла от радиальной переменной $\Psi(r)$ задается квадратурой

$$\Psi - \Psi_0 = \int_{r_0}^r \sqrt{A(r)} \frac{dr}{r^2} \left[\frac{K^2}{L^2 B(r)} - \frac{1}{r^2} - \frac{E^2}{L^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

Частица движется в плоскости, причем эта плоскость является экваториальной ($\Theta = \frac{\pi}{2}$) в новых угловых переменных. Для того, чтобы избежать излишних усложнений, во всех учебниках сразу предполагается, что частица изначально движется в экваториальной плоскости (см., например, [1]), поскольку $\theta = \frac{\pi}{2}$, очевидно, является точным решением уравнения (14).

В том случае, если в рассматриваемой задаче полярная ось зафиксирована по тем или иным соображениям симметрии, и необходимо работать с угловыми переменными θ и φ , траектория частицы задается двумя квадратурами:

$$\cos \theta(r) = \sqrt{1 - \frac{J^2}{L^2}} \sin \left\{ \arcsin \left[\frac{\cos \theta(r_0)}{\sqrt{1 - \frac{J^2}{L^2}}} \right] \pm \frac{L}{K} \int_{r_0}^r \frac{dr \sqrt{A(r)}}{r^2 \sqrt{\frac{1}{B(r)} - \frac{L^2}{K^2 r^2} - \frac{E^2}{K^2}}} \right\}, \quad (32)$$

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm \left[\arcsin \left(\frac{\cot \theta(r)}{\sqrt{\frac{L^2}{J^2} - 1}} \right) - \arcsin \left(\frac{\cot \theta(r_0)}{\sqrt{\frac{L^2}{J^2} - 1}} \right) \right], \quad (33)$$

непосредственно получающихся из (18) и (12), соответственно.

1.5. Примеры нахождения параметров K , J , L и E

Если траектория частицы не ограничена и включает бесконечно удалённую точку $r = \infty$, то используя асимптотические условия $B(\infty)=A(\infty)=1$, получим следствие уравнения (27)

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{|\infty}^2 = 1 - \frac{E^2}{K^2}. \quad (34)$$

Если частица обладает нулевой массой, то $E^2=0$ и $\frac{dr}{dt}|_{\infty}=1$. Иначе говоря, частица движется со скоростью света, а параметр K не может быть зафиксирован асимптотическим условием. Если частица массивна, то $E^2 = 1$ и параметр K , определяемый условием:

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)_{|\infty}^2}}, \quad (35)$$

равен известному релятивистскому фактору, в котором величина $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{|\infty}^2$ есть квадрат отношения радиальной скорости частицы на бесконечности к скорости света. Если частица покоится на бесконечности, то $K = 1$.

В качестве второго примера рассмотрим ограниченную круговую экваториальную орбиту для массивной частицы. Тот факт, что орбита круговая, означает, что $r(\tau) = R = const$ и $U^r = \frac{dr}{d\tau} = 0$. Экваториальность орбиты предполагает, что $\theta = \frac{\pi}{2}$, $L^2 = J^2$ и $U^\theta = \frac{d\theta}{d\tau} = 0$. Для массивной частицы $E^2 = 1$. Тогда из условия нормировки четырёх-вектора скорости частицы следует соотношение

$$g_{ik} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 1 \Rightarrow B(r) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{K^2}{B(R)} - \frac{J^2}{R^2} = 1. \quad (36)$$

Из равенства нулю радиального ускорения частицы, гарантирующего устойчивость круговой орбиты [1], следует равенство

$$\Gamma_{kl}^r U^k U^l = 0 \Rightarrow \frac{K^2 B'(R)}{B^2(R)} = 2 \frac{J^2}{R^3}. \quad (37)$$

Уравнения (36) и (37) позволяют найти параметры K и J как функции от радиуса орбиты R , если функция $B(r)$ известна:

$$K^2 = \frac{2B^2(R)}{2B(R) - RB'}, \quad J^2 = \frac{R^3 B'(R)}{2B(R) - RB'}. \quad (38)$$

Исключая параметры J и K из азимутального интеграла движения

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{J}{R^2}, \quad \varphi = \frac{Js}{R^2} = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{JB(R)}{R^2 K} = \sqrt{\frac{B'(R)}{2R}}, \quad (39)$$

обнаружим, что орбитальное движение равномерно, азимутальный угол линейен по координатному времени, а частота вращения определяется радиусом орбиты и видом функции $B(R)$.

2. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ: КЛАССИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

2.1. Приближение слабого поля и разложение Робертсона

Гравитационное поле в Солнечной системе считается слабым в том смысле, что безразмерный параметр $\frac{GM}{c^2 R}$ на поверхности и вне известных тяготеющих объектов весьма мал. Например, на поверхности Луны, Земли и Солнца этот параметр принимает следующие значения:

$$\frac{GM_{(\text{Moon})}}{c^2 R_{(\text{Moon})}} \simeq 3 \cdot 10^{-11}, \quad \frac{GM_{(\text{Earth})}}{c^2 R_{(\text{Earth})}} \simeq 7 \cdot 10^{-9}, \quad \frac{GM_{(\text{Sun})}}{c^2 R_{(\text{Sun})}} \simeq 2 \cdot 10^{-6}. \quad (40)$$

Малостью данного параметра обычно аргументируется применение разложение Робертсона

$$B(r) \simeq 1 - \frac{2\mathfrak{R}}{r} + \frac{2\mathfrak{R}^2}{r^2}(\beta - \gamma) + \dots, \quad A(r) = 1 + \frac{2\gamma\mathfrak{R}}{r} + \dots, \quad (41)$$

где γ и β представляют собой постньютоновские параметры [2], различные для конкурирующих теорий гравитации. Параметр \mathfrak{R} с размерностью длины

$$\mathfrak{R} \equiv \frac{GM}{c^2} \quad (42)$$

коэффициентом 2 отличается от Шварцшильдовского радиуса, широко используемого в общей теории относительности [1]. Второе слагаемое в разложении $B(r)$ не содержит произвольных параметров, поскольку все теории в ньютоновском пределе должны соответствовать значению метрического коэффициента $B(r) \rightarrow 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$ [1,2]. Если речь идёт об Общей теории относительности, то $\gamma = \beta = 1$, что становится очевидным, если разложить

точное решение Шварцшильда [1]

$$B_{(\text{Sch})}(r) = 1 - \frac{2\mathfrak{R}}{r}, \quad A_{(\text{Sch})}(r) = \frac{1}{1 - \frac{2\mathfrak{R}}{r}} \simeq 1 + \frac{2\mathfrak{R}}{r} + \dots \quad (43)$$

Далее мы используем разложение Робертсона для оценки всех гравитационных эффектов в Солнечной системе.

2.2. Гравитационное красное смещение

Фотон, как безмассовая частица, движется вдоль изотропной геодезической линии пространства - времени и характеризуется четырёхмерным волновым вектором k^i :

$$k^i = \frac{h}{2\pi} \left(\frac{dx^i}{d\tau} \right), \quad (44)$$

удовлетворяющим соотношению нормировки

$$g_{ij}k^ik^j = \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = \text{const} = 0. \quad (45)$$

Для наблюдателя, покоящегося в системе отсчёта, связанной с центральным тяготеющим телом, четыре-вектор скорости имеет вид

$$V^i = \delta_t^i \frac{1}{\sqrt{B(r)}}, \quad g_{ik}V^iV^k = 1. \quad (46)$$

Частота фотона, фиксируемая наблюдателем

$$\omega \equiv g_{ij}V^ik^j = \sqrt{B(r)}k^t = \frac{k_t}{\sqrt{B(r)}}, \quad (47)$$

с помощью следствия

$$k^t = \frac{h}{2\pi} \frac{dt}{d\tau} = \frac{h}{2\pi} \frac{K}{B(r)} \quad (48)$$

из соотношения (10) может быть записана в следующем виде:

$$\omega(r) = \frac{hK}{2\pi\sqrt{B(r)}} = \frac{\text{const}}{\sqrt{B(r)}} = \frac{\omega(\infty)}{\sqrt{B(r)}}. \quad (49)$$

Здесь символ $\omega(r)$ означает частоту фотона, регистрируемую на расстоянии r от тяготеющего центра, а $\omega(\infty)$ - это частота, которую измерил бы бесконечно удалённый наблюдатель. Относительное изменение частоты

фотона, зарегистрированной на расстояниях r_1 и r_2 , определяется формулой

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \equiv \frac{\omega(r_2) - \omega(r_1)}{\omega(r_1)} = \sqrt{\frac{B(r_1)}{B(r_2)}} - 1 \quad (50)$$

и зависит только от отношения $\frac{B(r_1)}{B(r_2)}$ значений метрической функции $B(r)$, причём функция $A(r)$ в формуле для красного смещения не участвует. В приближении слабого поля относительное изменение частоты описывается формулой

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \simeq \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r_1}\right) \left(1 + \frac{\mathfrak{R}}{r_2}\right) - 1 \simeq \mathfrak{R} \frac{(r_1 - r_2)}{r_1 r_2}. \quad (51)$$

У поверхности Земли можно положить $r_1 = R_{(\text{Earth})}$, $r_2 = R_{(\text{Earth})} + H$, где $R_{(\text{Earth})}$ - это радиус Земли, а H - высота над поверхностью Земли, на которой производится измерение частоты фотона. Тогда получаем знаменитую формулу для относительного изменения частоты фотона при измерениях на поверхности Земли и на высоте H :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{GM_{(\text{Earth})}H}{c^2 R_{(\text{Earth})}^2} = -\frac{gH}{c^2}. \quad (52)$$

Здесь g означает ускорение свободного падения на поверхности Земли. В энергетических терминах эта формула выглядит еще более привычно:

$$\mathcal{E} \equiv \frac{h}{2\pi}\omega, \quad \Delta\mathcal{E} = \frac{h}{2\pi}\Delta\omega = -\mathcal{E} \frac{gH}{c^2} = -m_{(\text{photon})}gH. \quad (53)$$

В оценочных формулах (52), (53) нет постньютоновского параметра γ , величина эффекта одинакова для всех теорий гравитации, имеющих правильный ньютоновский предел. Параметр $m_{(\text{photon})}$ обозначает эффективную массу фотона, приписываемую ему формулой Эйнштейна $\mathcal{E} = m_{(\text{photon})}c^2$.

Измерение красного смещения частоты фотонов впервые было зарегистрировано в 1960 году (Pound R.V., Rebka G.A., Jr., Snider J.L.). Описание деталей этого знаменитого эксперимента читатель может найти в обзорах [2-4,6] и цитированной в них литературе.

2.3. Запаздывание радарного эха

Рассмотрим фотон, движущийся радиально, и для описания его географа воспользуемся формулой (28) при значении параметров $K=1$ и $L=0$ с метрическими функциями, представленными разложением Робертсона (41):

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \pm \int_{r_0}^r dr \frac{\sqrt{A(r)}}{\sqrt{B(r)}} \simeq \pm \int_{r_0}^r dr \left(1 + \gamma \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) \left(1 + \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) \simeq \\ &\simeq \pm \left[(r - r_0) + (1 + \gamma) \mathfrak{R} \log \frac{r}{r_0} \right]. \end{aligned} \quad (54)$$

Пусть для простоты рассуждений фотон, выпущенный с Земли в момент t_0 , когда Меркурий находился на линии Земля - Солнце, отразился от Меркурия и вернулся на Землю в момент t_* . Согласно формуле (54) время, прошедшее между стартом и финишем фотона

$$t_* - t_0 = 2[r_{(\text{Earth})} - r_{(\text{Mercury})}] + 2(1 + \gamma) \mathfrak{R} \log \frac{r_{(\text{Earth})}}{r_{(\text{Mercury})}}, \quad (55)$$

содержит временную задержку

$$\Delta t_{(\text{Gravity})} = 2(1 + \gamma) \frac{GM_{(\text{Sun})}}{c^2} \log \frac{r_{(\text{Earth})}}{r_{(\text{Mercury})}}, \quad (56)$$

обязанную своим происхождением влиянию гравитационного поля Солнца. Здесь $r_{(\text{Earth})}$ и $r_{(\text{Mercury})}$ - расстояния от Солнца до соответствующих планет. Эта задержка, оцениваемая сотнями микросекунд была впервые измерена в 1967 году (Shapiro I.I.), а в последующие годы эксперимент был многократно повторён [2,3,6]. Согласно полученным результатам параметр γ равен единице с точностью до 1%.

2.4. Отклонение луча света в гравитационном поле Солнца

Для оценки величины отклонения луча света от своего первоначального направления за счёт воздействия гравитационного поля Солнца используется параметр

$$\Delta \Psi = 2|\Psi(r_0) - \Psi(\infty)| - \pi. \quad (57)$$

Расстояние r_0 определяется по точке минимального удаления траектории фотона от центра звезды, которая находится из условия минимума

$$\frac{dr}{d\Psi}|_{r_0} = 0. \quad (58)$$

Как мы уже отмечали ранее, для фотонов на неограниченных орбитах $E=0$ и $K=1$, и формула для траектории фотона (31) при условии (58) дает соотношение

$$L^2 B(r_0) = r_0^2. \quad (59)$$

С учётом этого соотношения величину изменение азимутального угла при движении фотона из бесконечности к точке минимального удаления от центра можно переписать в виде

$$\Psi(r_0) - \Psi(\infty) = \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr \sqrt{A(r)}}{r} \left\{ \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \left[\frac{B(r_0)}{B(r)} \right] - 1 \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (60)$$

Используя разложение Робертсона в приближении слабого поля, упростим это выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi(r_0) - \Psi(\infty) &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \left(1 + \gamma \frac{\mathfrak{R}}{r} \right) \left[\left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) + 2\mathfrak{R} \frac{r^2}{r_0^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}} \left[1 + \gamma \frac{\mathfrak{R}}{r} + \frac{r\mathfrak{R}}{r_0(r+r_0)} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

При $\mathfrak{R} = 0$ интеграл вычисляется заменой переменной $r \rightarrow \frac{r_0}{\sin t}$ и дает очевидный результат:

$$\Psi(r_0) - \Psi(\infty) \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}. \quad (62)$$

Вклад в параметр (57), линейный по малой величине \mathfrak{R} , удобно переписать с помощью новой безразмерной переменной величины $\xi = \frac{r}{r_0}$:

$$\Delta\Psi = \frac{2\mathfrak{R}}{r_0} \int_1^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\frac{\gamma}{\xi^2} + \frac{1}{1 + \xi} \right] = \frac{2\mathfrak{R}}{r_0} \int_1^{\infty} d \left[\gamma \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} + \sqrt{\frac{\xi - 1}{\xi + 1}} \right]. \quad (63)$$

Этот параметр оказывается равным

$$\Delta\Psi = \frac{2\mathfrak{R}}{r_0} (1 + \gamma). \quad (64)$$

Используя значение \mathfrak{R} для Солнца (40), получим знаменитый результат

$$\Delta\Psi = 1.75'' \left(\frac{R_{(\text{Sun})}}{r_0} \right) \left(\frac{1 + \gamma}{2} \right), \quad (65)$$

представленный в угловых секундах. История экспериментов по регистрации отклонения лучей света гравитационным полем Солнца началась в 1919 году во время экспедиций, организованных Эддингтоном [1-4]. Результаты этих наблюдений были признаны как первое доказательство справедливости общей теории относительности. Но ценность данной экспериментальной деятельности оказалась ещё и в том, что на базе расчётов величины отклонения света тяготеющим центром были сформулированы идеи теории гравитационного линзирования. В настоящее время поиск гравитационных линз во Вселенной дает ошеломляющие результаты и считается главным инструментом исследования распределения темной материи.

2.5. Смещение перигелия Меркурия

При движении массивной частицы в поле тяготеющего центра наибольший интерес для экспериментов представляют финитные орбиты. Исследуя такую задачу теоретически, мы обязаны положить $E^2 = 1$, а оставшиеся параметры K и L определить из условий экстремума:

$$\left(\frac{dr}{d\Psi} \right)_{|r=r_{\pm}} = 0. \quad (66)$$

В общем случае количество точек экстремума не определено, оно зависит от вида метрических функций. Однако, имея в виду приложения к движению тел в Солнечной системе и предполагая, что эллиптические кеплеровы орбиты являются базовыми решениями в ньютоновском приближении, мы предполагаем найти два решения уравнения (66), $r = r_+$ и $r = r_-$, соответствующие (квази)перигелию и (квази)афелию. В этом случае, согласно уравнению траектории (31), условия (66) выполняются, если

$$\frac{K^2}{L^2 B(r_+)} = \frac{1}{r_+^2} + \frac{1}{L^2}, \quad \frac{K^2}{L^2 B(r_-)} = \frac{1}{r_-^2} + \frac{1}{L^2}. \quad (67)$$

Вычитая и складывая эти равенства, находим два полезных соотношения между параметрами L , K , r_+ и r_- :

$$\frac{K^2}{L^2} = \frac{\left[\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}\right]}{\left[\frac{1}{B(r_+)} - \frac{1}{B(r_-)}\right]}, \quad \frac{1}{L^2} = \frac{\left[\frac{r_-^2}{B(r_-)} - \frac{r_+^2}{B(r_+)}\right]}{r_-^2 r_+^2 \left[\frac{1}{B(r_+)} - \frac{1}{B(r_-)}\right]}. \quad (68)$$

Согласно уравнению траектории (31) изменение азимутального угла при движении частицы от (квази)афелия к (квази)перигелию описывается формулой

$$\Psi_+ - \Psi_- = \int_{r_-}^{r_+} \sqrt{A(r)} \frac{dr}{r^2} \left[\frac{K^2}{L^2 B(r)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{L^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (69)$$

В приближении слабого поля кроме разложения

$$B(r) \simeq 1 - \frac{2\Re}{r} + \frac{2\Re^2}{r^2}(\beta - \gamma) + \dots \quad (70)$$

с точностью до второго порядка малости включительно полезно иметь перед глазами также и формулу для функции $\frac{1}{B(r)}$:

$$\frac{1}{B(r)} \simeq 1 + \frac{2\Re}{r} + \frac{2\Re^2}{r^2}(2 - \beta + \gamma) + \dots \quad (71)$$

С помощью этих соотношений преобразуем выражение под корнем в знаменателе подынтегральной функции:

$$\left\{ \frac{K^2}{L^2 B(r)} - \frac{1}{L^2} - \frac{1}{r^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \simeq \left\{ \frac{K^2 - 1}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2K^2\Re}{rL^2} \left[1 + \frac{\Re}{r}(2 - \beta + \gamma) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (72)$$

и вычислим с помощью (68) входящие туда параметры:

$$\frac{K^2 - 1}{L^2} \simeq -\frac{1}{r_+ r_-} \left[1 - \Re(2 - \beta + \gamma) \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right], \quad (73)$$

$$\frac{K^2}{L^2} \simeq -\frac{\left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right)}{2\Re} \left[1 - \Re(2 - \beta + \gamma) \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right]. \quad (74)$$

Тогда (72) принимает вид

$$\left\{ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left[1 - \Re(2 - \beta + \gamma) \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (75)$$

а искомое изменение азимутального угла представляется интегралом

$$\Psi_+ - \Psi_- = \left[1 + \frac{1}{2} \Re(2 - \beta + \gamma) \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) \right] \int_{r_-}^{r_+} \frac{(1 + 2\gamma \frac{\Re}{r}) dr}{r^2 \sqrt{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \left(\frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right)}}. \quad (76)$$

Вводя стандартным образом эксцентриситет ε , длину полуоси a и фокальный параметр P орбиты (квази)эллиптической орбиты:

$$r_+ = (1 + \varepsilon)a, \quad r_- = (1 - \varepsilon)a, \quad P = (1 - \varepsilon^2)a, \quad \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} = \frac{2}{P}, \quad (77)$$

а также новую переменную интегрирования ψ :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{P}(1 - \varepsilon \sin \psi), \quad (78)$$

получаем окончательный ответ:

$$\begin{aligned} \Psi_+ - \Psi_- &= \left[1 + \frac{\Re}{P}(2 - \beta + \gamma) \right] \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} d\psi \left[1 + \gamma \frac{\Re}{P}(1 - \varepsilon \sin \psi) \right] = \\ &= \pi \left[1 + \frac{\Re}{P}(2 - \beta + \gamma) \right] \left(1 + \gamma \frac{\Re}{P} \right) \simeq \pi \left[1 + \frac{\Re}{P}(2 - \beta + 2\gamma) \right]. \end{aligned} \quad (79)$$

При полном проходе от одного (квази)перигелия до другого азимутальный угол отклоняется от 2π на величину

$$\Delta\Psi \equiv 2|\Psi_+ - \Psi_-| - 2\pi \simeq 6\pi \left\{ \frac{GM}{c^2 P} \right\} \left\{ \frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3} \right\}. \quad (80)$$

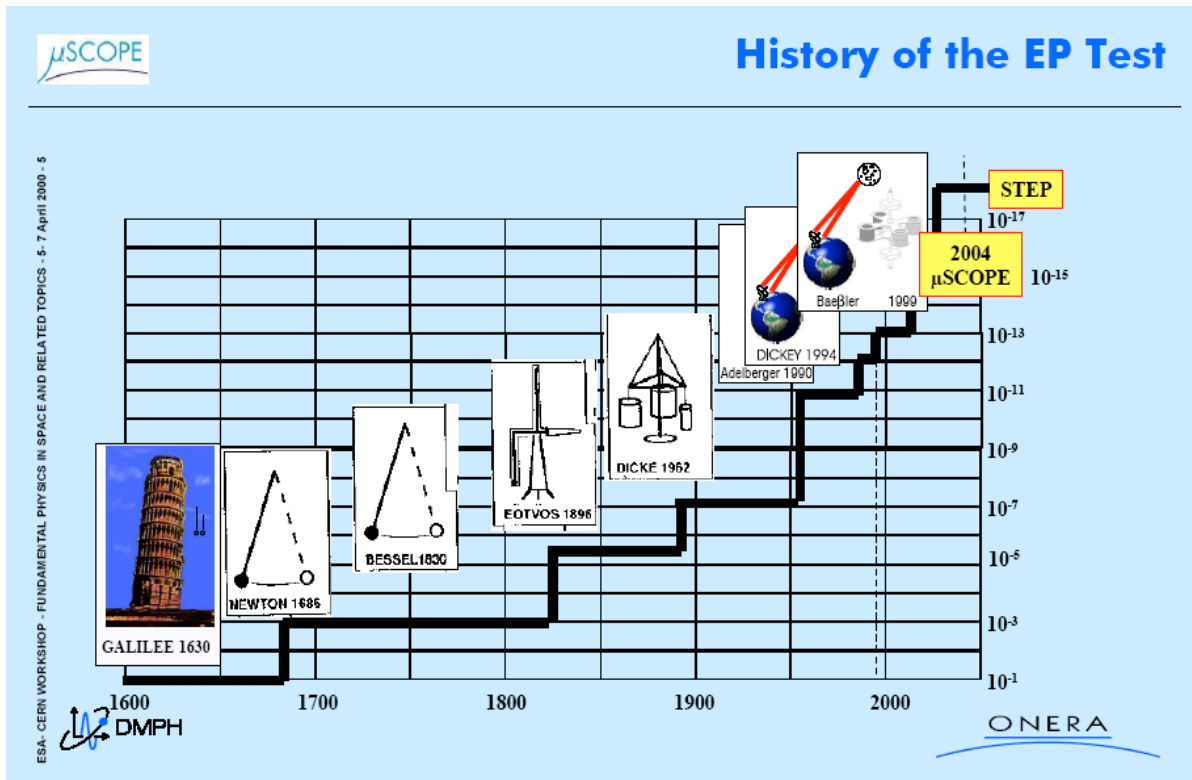
Для ОТО параметр $\left\{ \frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3} \right\}$ равен единице. Величина смещения перигелия была оценена для Меркурия. Его фокальный параметр равен $P = 55.3 \cdot 10^9 m$, величина GM/c^2 оценивается как $1475m$. Величина смещения за оборот $\Delta\Psi \simeq 0.1038''$, будучи умноженной на 415 оборотов за столетие, дает знаменитую теоретическую оценку смещения перигелия Меркурия $\Delta\Psi \simeq 43.03''$ за столетие. Многочисленные дискуссии по поводу оценок наблюдаемого смещения (см. [1-4]) позволили установить, что параметр $\left\{ \frac{(2 - \beta + 2\gamma)}{3} \right\}$ отличится от единицы не более, чем на 1%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Вейнберг, *Гравитация и космология*. М.: Мир, 1975.
- [2] К.М. Уилл, *Теория и эксперимент в гравитационной физике*. М.: Энергоатомиздат, 1985.
- [3] И. Шапиро, *Экспериментальная проверка общей теории относительности*. С. 215-240. Э. Амальди, Г. Пиццелла, *Поиск гравитационных волн*. С. 241-396. В кн.: *Астрофизика, кванты и теория относительности*. М.: Мир, 1982.
- [4] К.М. Уилл, *Теория гравитации и эксперимент*. С. 11-86. В кн.: *Общая теория относительности* под ред. С. Хокинга и В. Израэля. М.: Мир, 1983.
- [5] И. Бичак, В.Н. Руденко, *Гравитационные волны в ОТО и проблема их обнаружения*. М.: МГУ, 1987.
- [6] Clifford M. Will, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*. <http://www.livingreviews.org/Articles/Irr-2006-3/>

Иллюстрация 1

История тестирования Принципа Эквивалентности



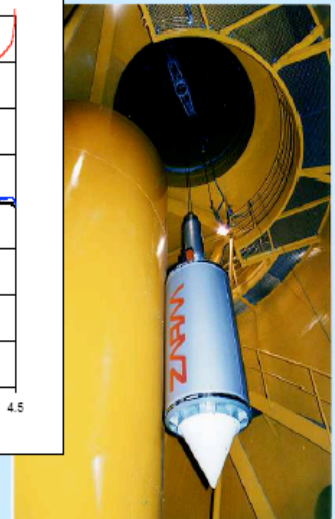
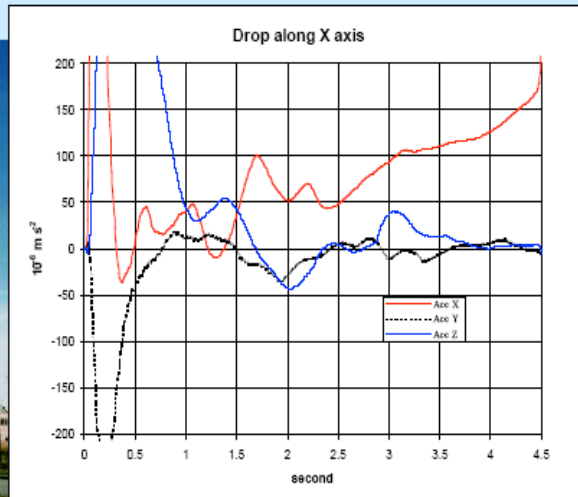
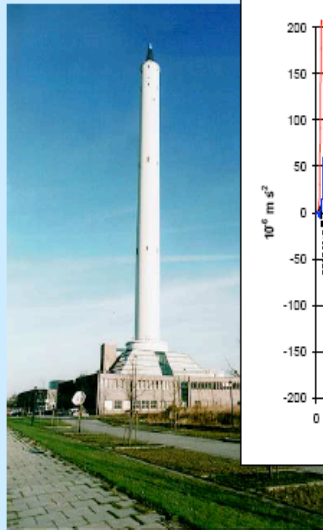
INVESTIGATOR	SENSITIVITY	METHOD
Philiponus, 500 (?)	"small"	Drop Tower
Galileo, 1590 (?)	10 ⁻²	Drop Tower
Newton, 1686	10 ⁻³	Pendulum
Bessel, 1832	10 ⁻⁵	Pendulum
Potter, 1923	10 ⁻⁶	Pendulum
Eotvos, 1922	10 ⁻⁸	Torsion Balance
Dicke et al., 1964	10 ⁻¹¹	Torsion Balance
Braginskii & Panov, 1972	10 ⁻¹²	Torsion Balance
Shapiro et. al., 1976	10 ⁻¹²	Lunar Laser Ranging
Keiser & Faller, 1981	10 ⁻¹⁰	Fluid Support
Niebauer et al., 1987	10 ⁻¹⁰	Drop Tower
Adelberger 1990	10 ⁻¹²	Torsion Balance
MiniSTEP ~2003	10 ⁻¹⁸	Earth Orbit

Башня для тестирования Принципа Эквивалентности Бремен. Германия



Free-Fall in Zarm Drop Tower of STAR Accelerometer (CHAMP Mission) June 1998

μ Gravity tests before and After S/C vibrations



ESA - CERN WORKSHOP - FUNDAMENTAL PHYSICS IN SPACE AND RELATED TOPICS - 5 - 7 April 2000 - 14

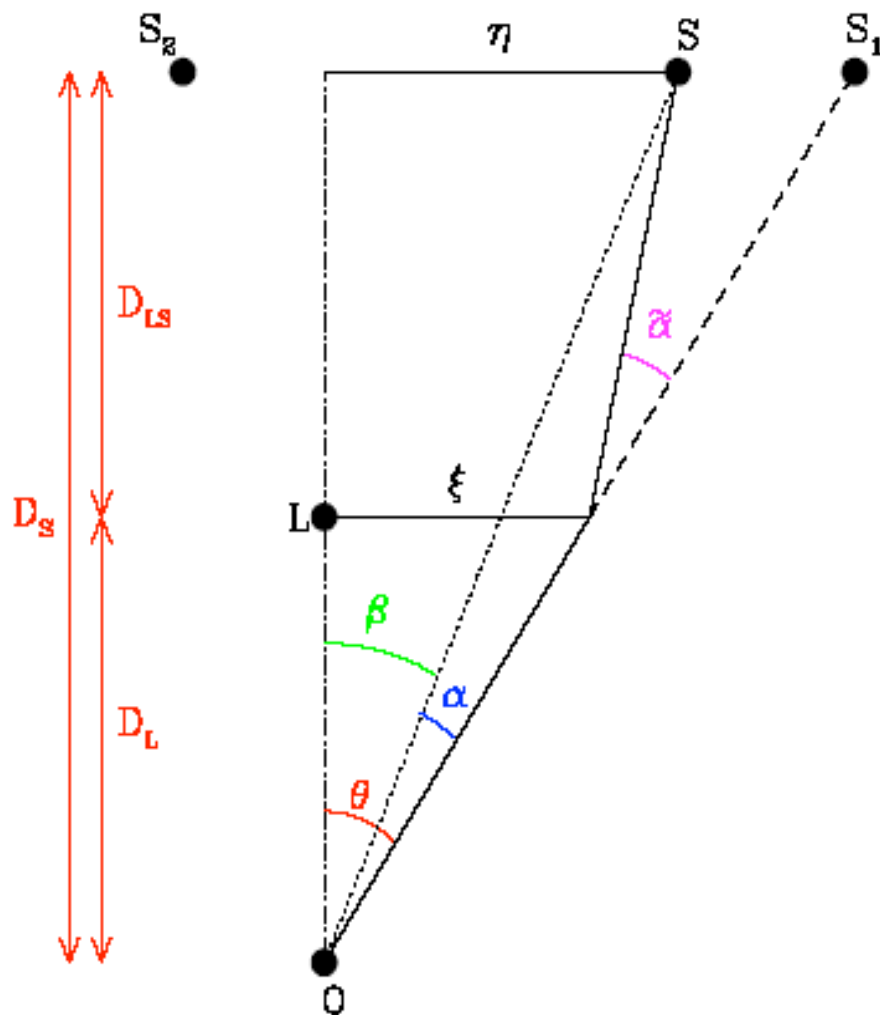


ONERA

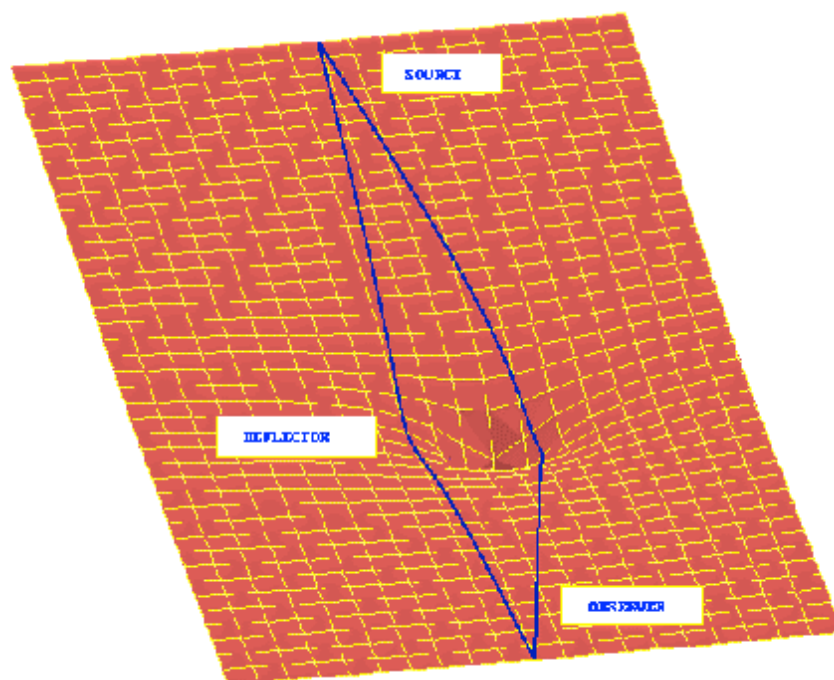
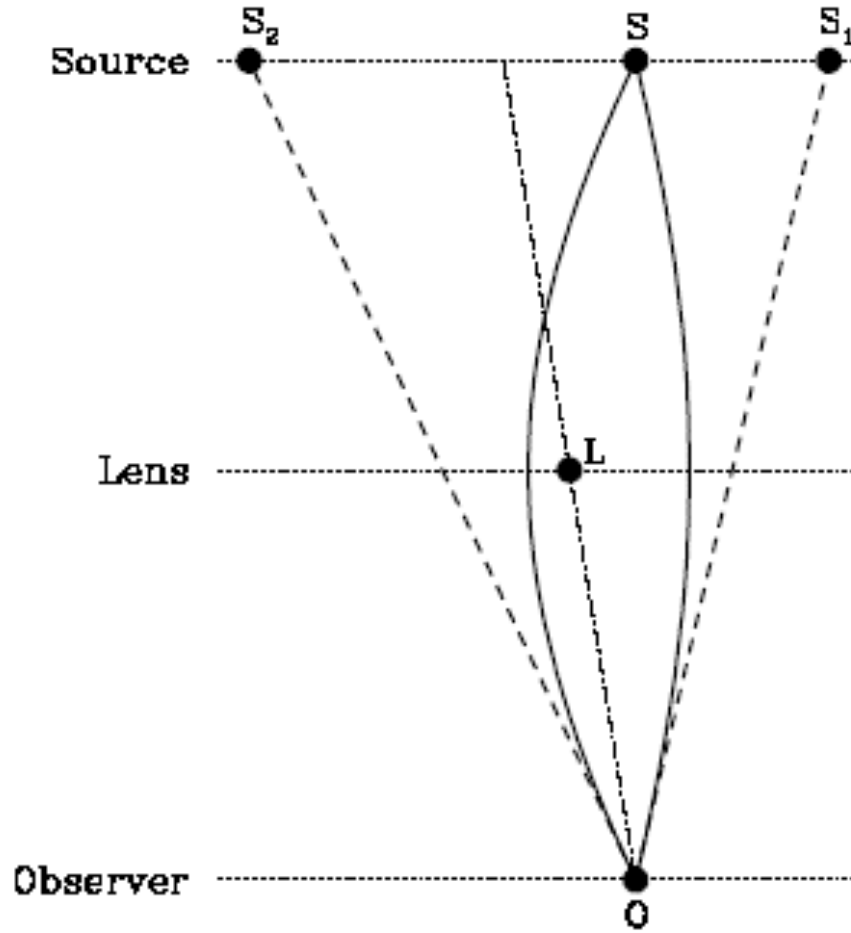
Оптический источник, гравитационная линза и определение радиуса Эйнштейна

$$R_{\text{Einstein}} \equiv \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}$$

$$R_{\text{Einstein}} \simeq 0.5 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{M}{M_{\text{Sun}}}} \text{ arcsec}$$



Формирование двойного изображения как результат гравитационного линзирования



**История и содержание
теории гравитационного линзирования**

Einstein A 1936 *Science* **84** 506

Zwicky F 1937 *Phys. Rev.* **51** 290

Zwicky F 1937 *Phys. Rev.* **51** 679

Schmidt M 1963 *Nature* **197** 1040

Klimov Yu G 1963 *Sov. Phys.—Dokl.* **8** 119

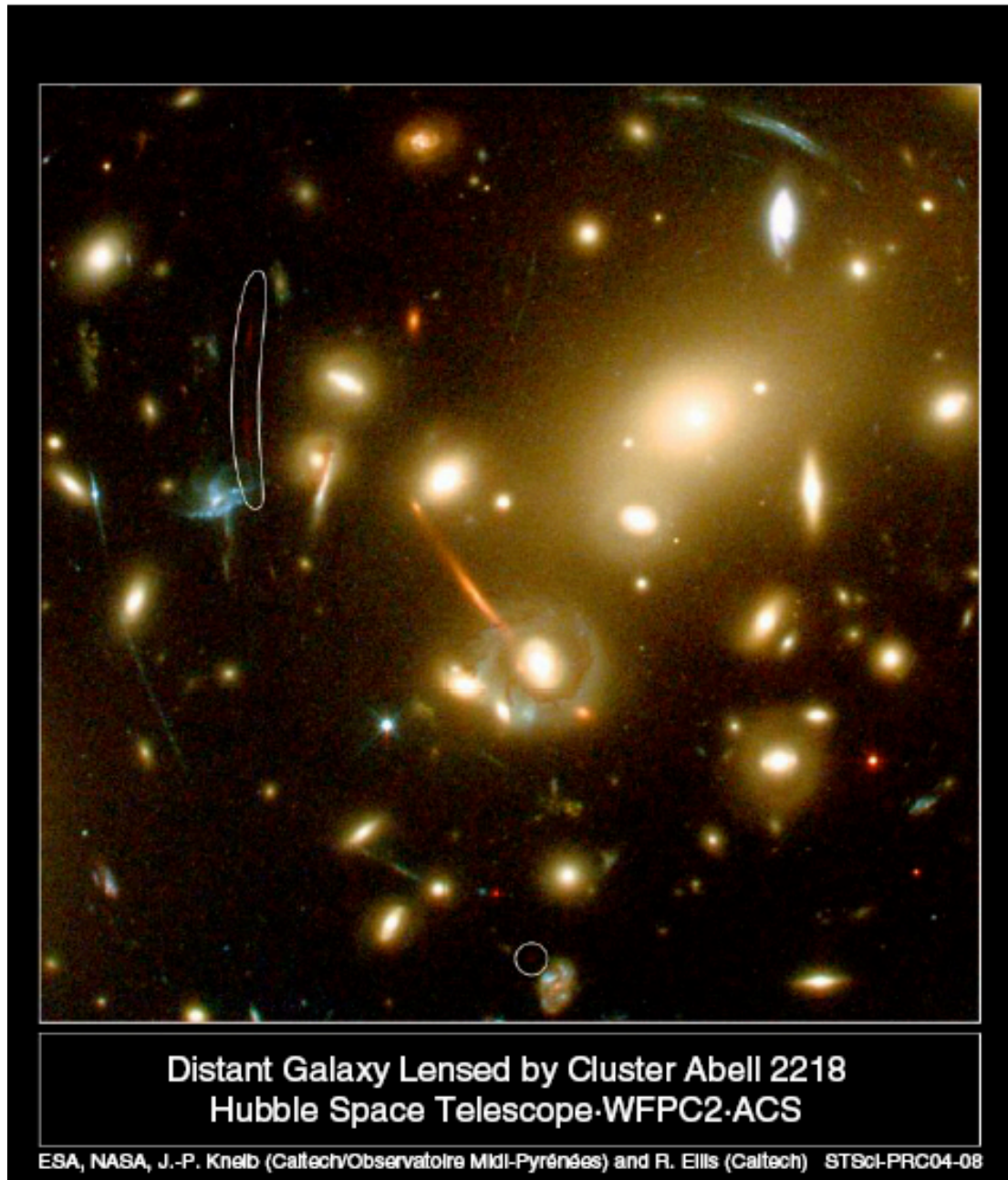
Liebes S Jr 1964 *Phys. Rev. B* **133** 835

Refsdal S 1964 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **128** 295

- **Quasar microlensing.**
- **Multiply-imaged quasars.**
- **Einstein rings.**
- **Giant luminous arcs and arclets.**
- **Weak lensing / Statistical lensing.**
- **Cosmological aspects of (strong) lensing.**
- **Galactic microlensing.**

Иллюстрация 6

Линзированное изображение галактики



Пример двойного изображения

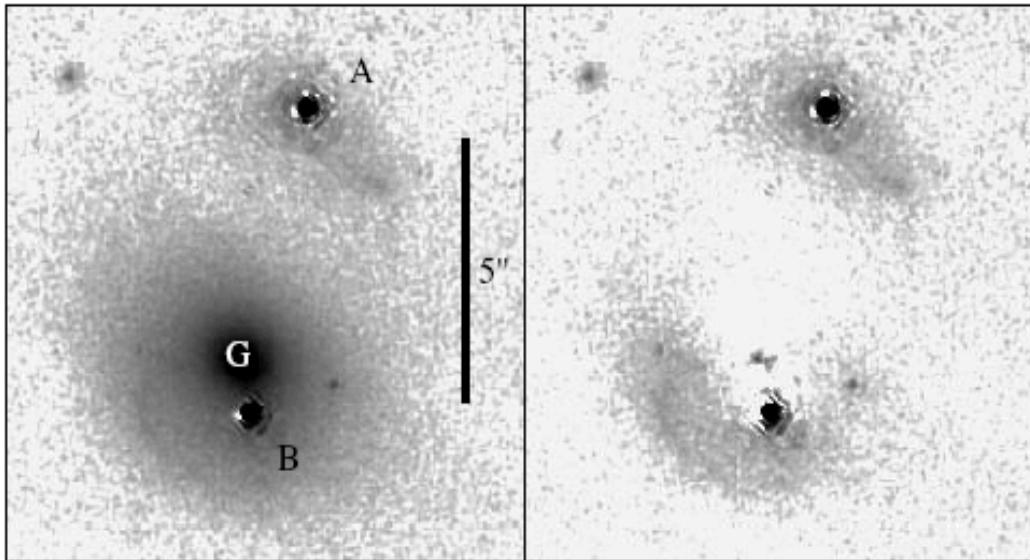


Figure 10. The double GLS Q0957+561. The two images are A and B at $z_s = 1.41$. G is the main lens galaxy, a cD at the centre of a cluster of galaxies at $z_l = 0.36$. The left panel shows our CASTLES NICMOS H-band image after removal of PSF artifacts, as in figure 2. The right panel is the image from the left panel, after subtraction of a photometric model for G. The arcs centred on A and B are images of the host galaxy of the quasar.

Пример четырехкратного изображения

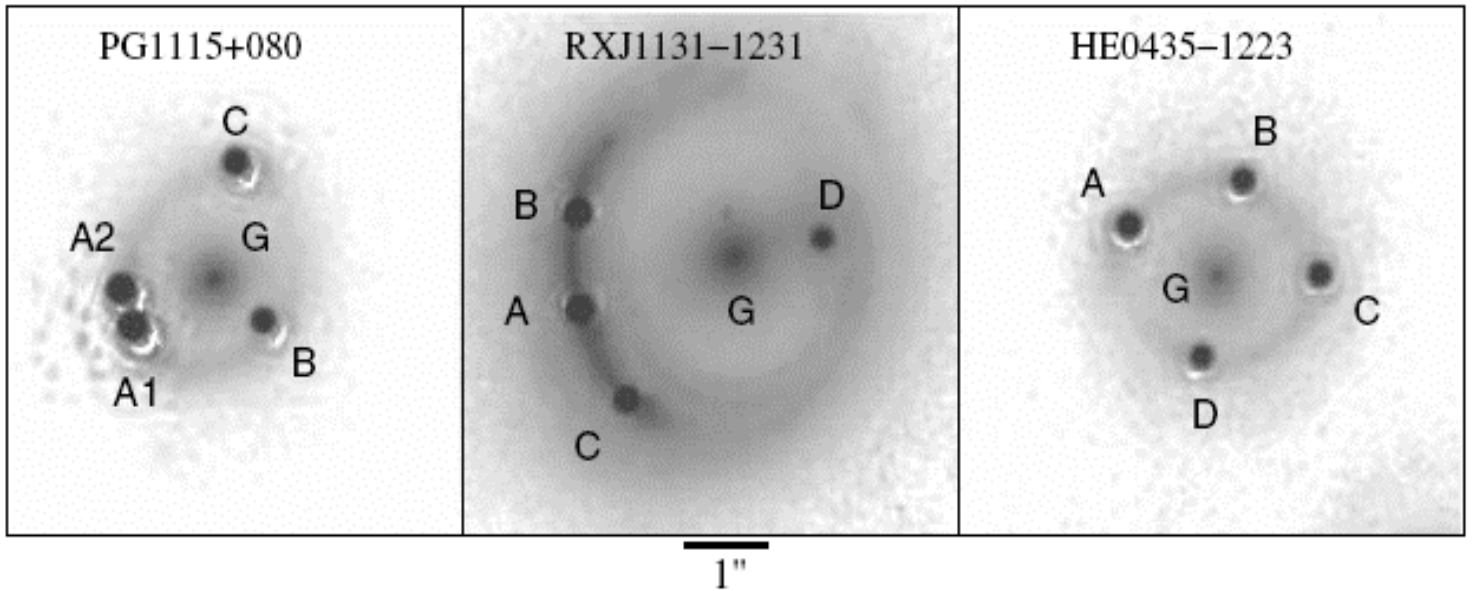


Figure 4. CASTLES (see the text) HST NICMOS H-band images of three quadruple GLS. The different configurations in the three panels arise from the positioning of the source relative to the caustic curves generated by the lens (see [2] for details). We used the same procedure as in figure 2 to remove PSF artifacts.

Пример полного Эйнштейновского кольца

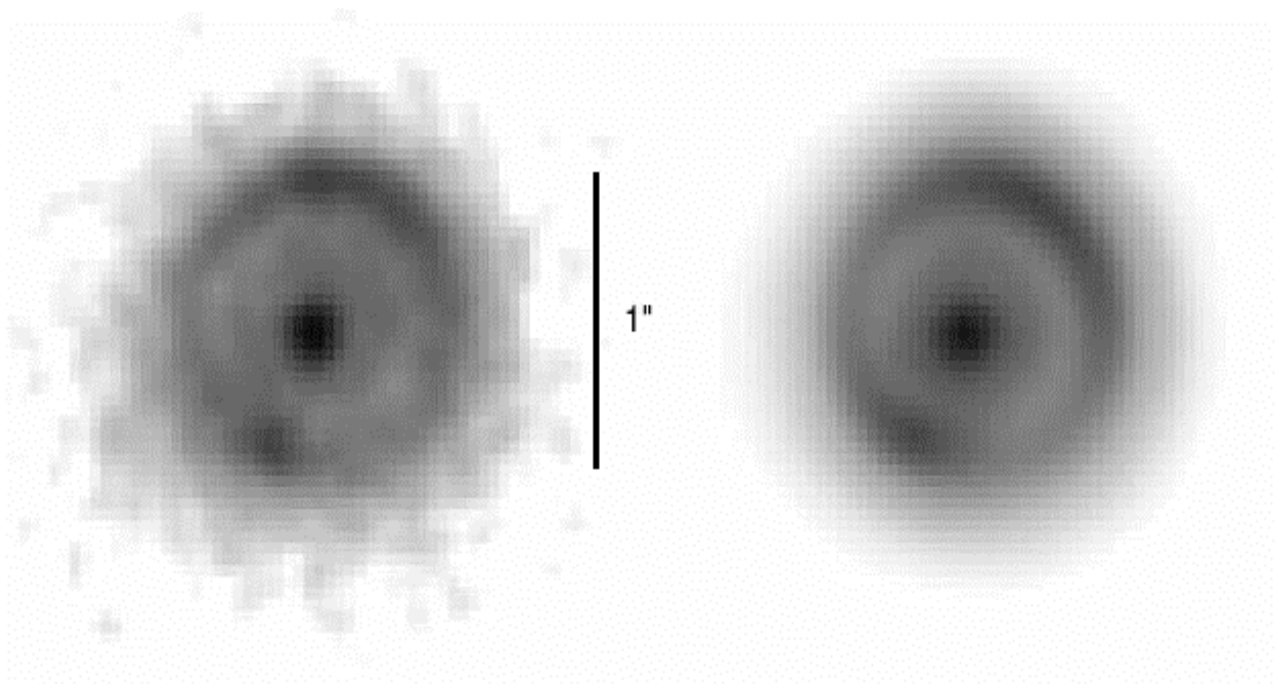


Figure 5. Left panel: CASTLES HST NICMOS image of the complete Einstein-ring BLS B1938 + 666. Right panel: a photometric model including an elliptical lens galaxy and a lensed extended source to produce the ring.

Схема формирования полного Эйнштейновского кольца

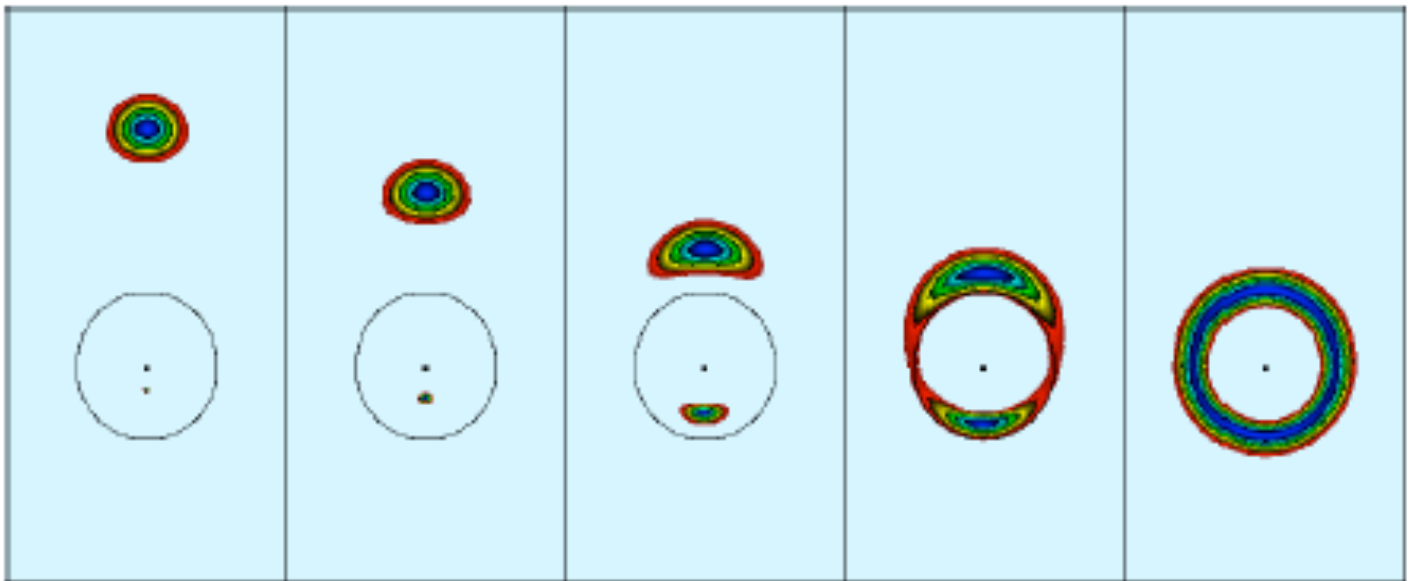


Figure 19: *Five snapshots of a gravitational lens situation: From left to right the alignment between lens and source gets better and better, until it is perfect in the rightmost panel. This results in the image of an “Einstein ring”.*

Пример Эйнштейновского кольца

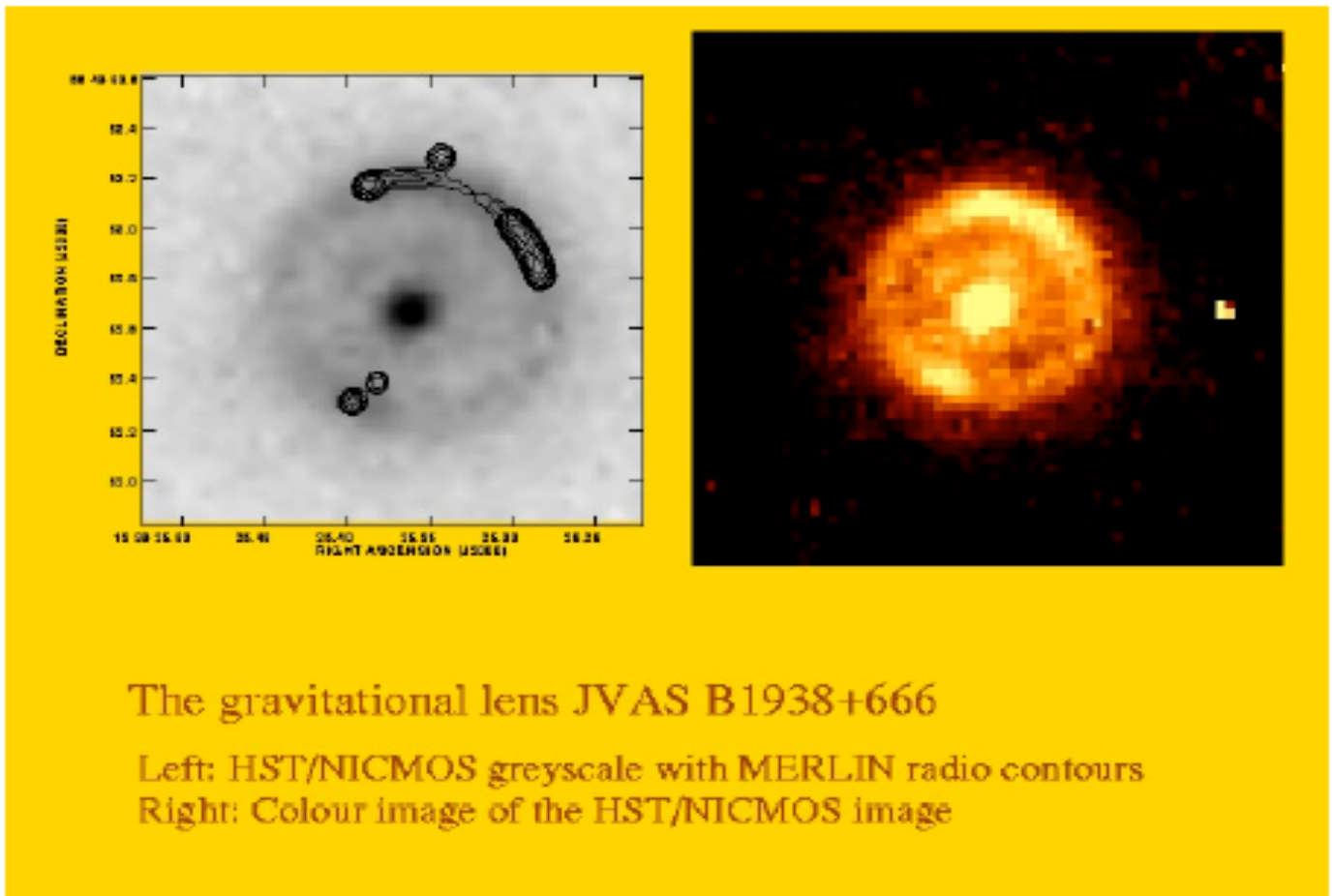


Figure 15: *Einstein ring 1938+666 (from [72]): The left panel shows the radio map as contour superimposed on the grey scale HST/NiCMOS image; the right panel is a color depiction of the infrared HST/NICMOS image. The diameter of the ring is about 0.95 arcseconds. (Credits: Neal Jackson.)*

Пример четырехкратного изображения

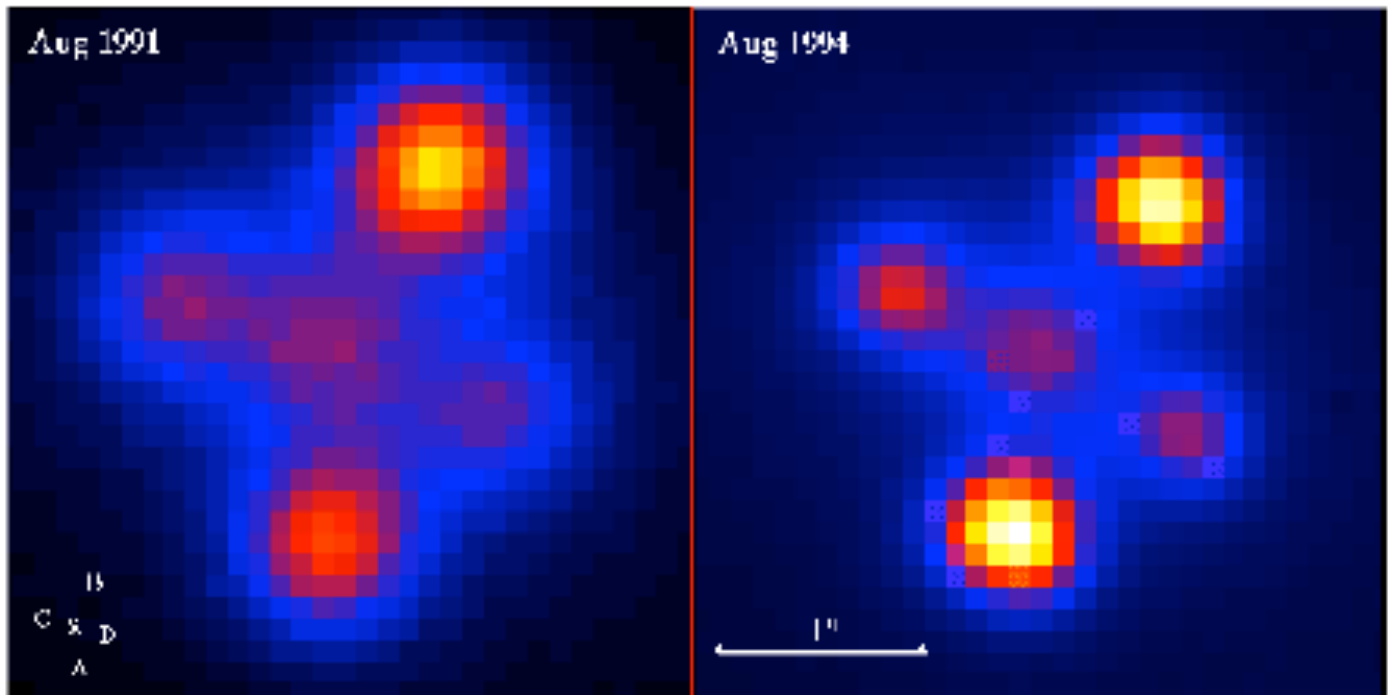


Figure 13: *Two images of the quadruple quasar Q2237+0305 separated by three years. It is obvious that the relative brightnesses of the images change. Image B is clearly the brightest one in the left panel, whereas images A and B are about equally bright in the right panel. (Credits: Geraint Lewis.)*

Пример двойного изображения

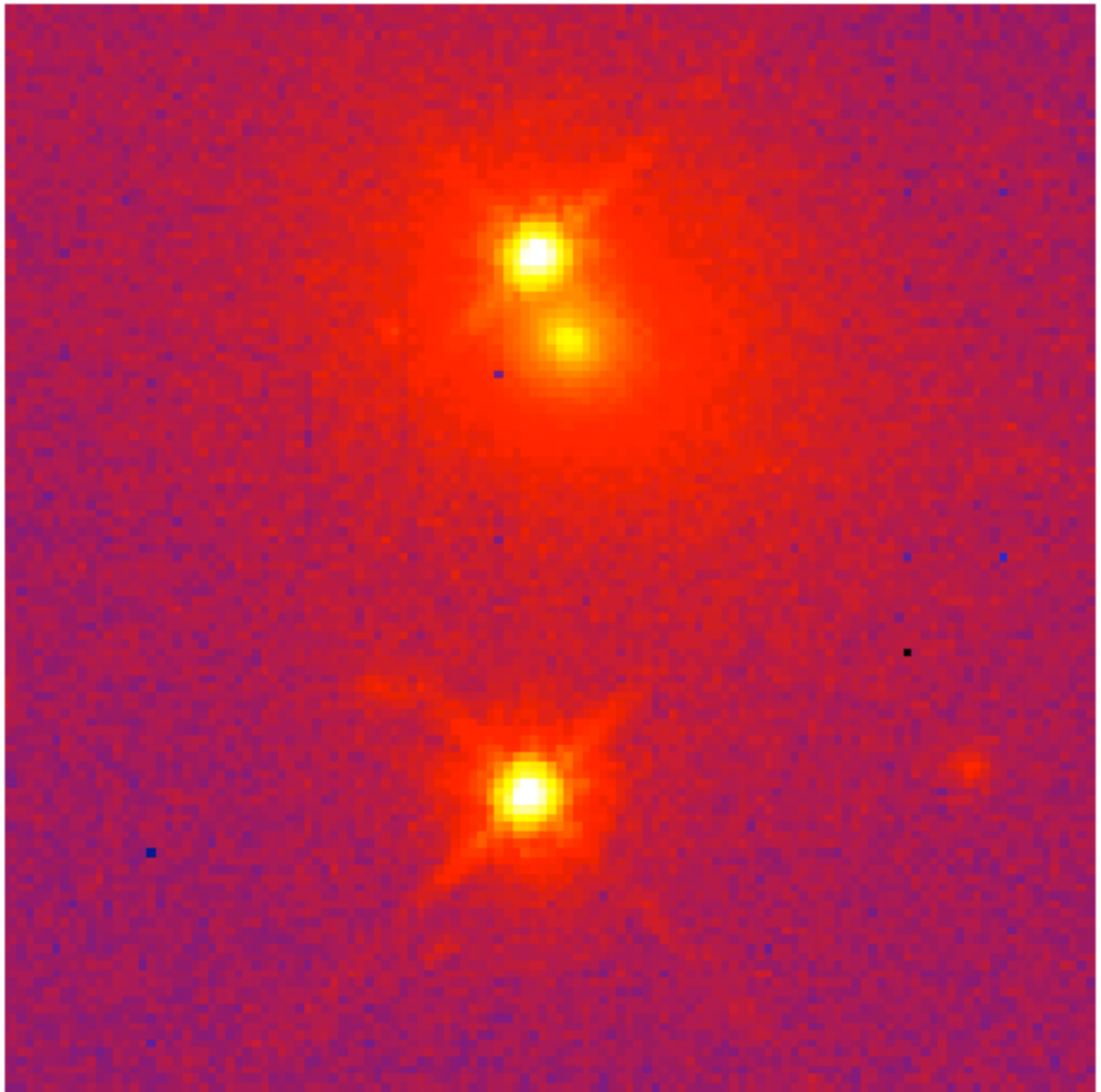


Figure 6: *In this false color Hubble Space Telescope image of the double quasar Q0957+561A,B. The two images A (bottom) and B (top) are separated by 6.1 arcseconds. Image B is about 1 arcsecond away from the core of the galaxy, and hence seen “through” the halo of the galaxy. (Credits: E.E. Falco et al. (CASTLE collaboration [47]) and NASA.)*

Пример микролинзирования

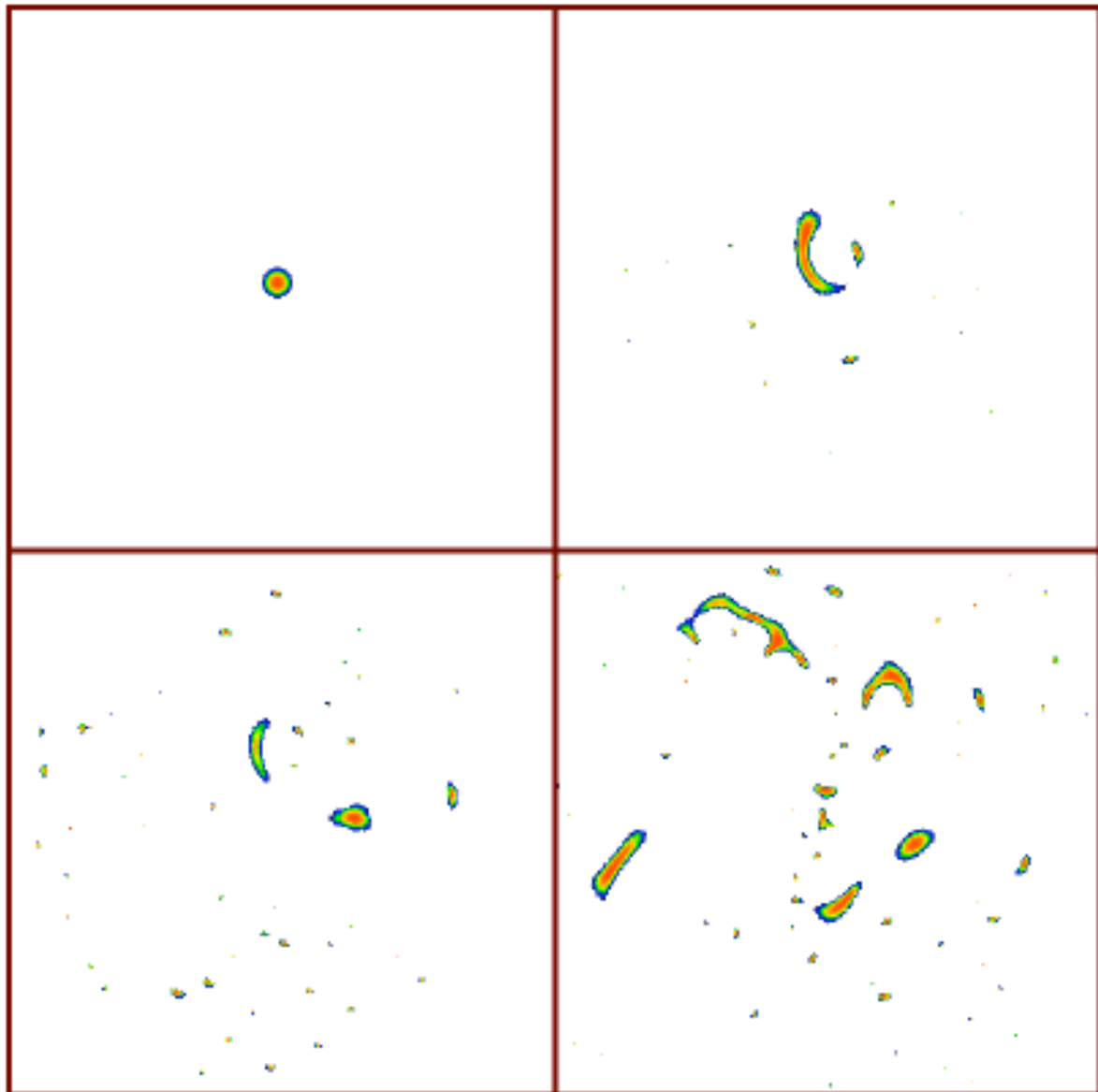


Figure 9: “Micro-Images”: The top left panel shows an assumed “unlensed” source profile of a quasar. The other three panels illustrate the micro-image configuration as it would be produced by stellar objects in the foreground. The surface mass density of the lenses is 20% (top right), 50% (bottom left) and 80% (bottom right) of the critical density (cf. Equation (16)).

Пример восстановления распределения скрытой массы

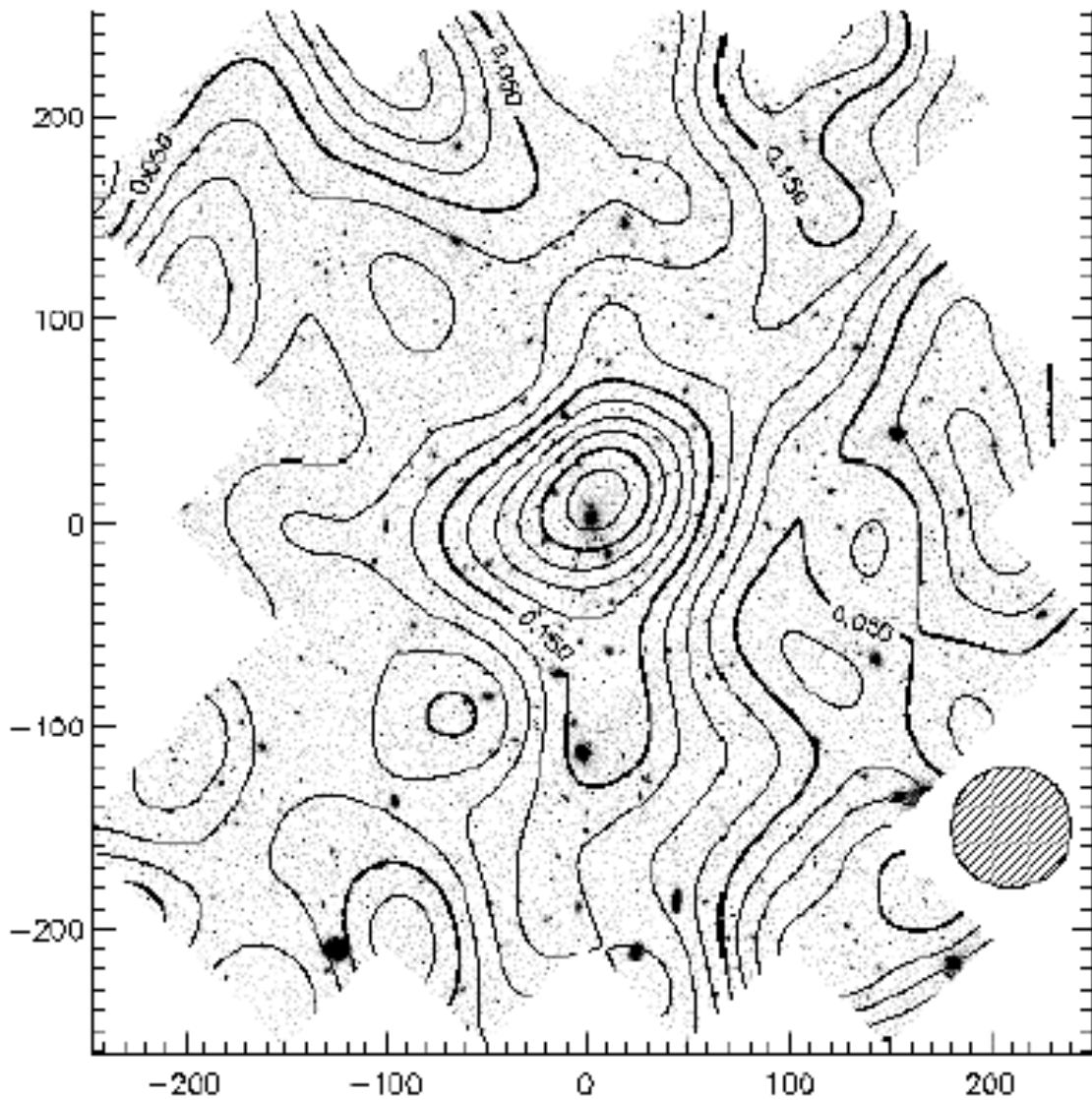


Figure 18: *The reconstructed mass distribution of cluster CL1358+62 from a weak lensing analysis is shown as contour lines superposed on the image taken with the Hubble Space Telescope [61]. The map is smoothed with a Gaussian of size 24 arcsec (see shaded circle). The center of the mass distribution agrees with the central elliptical galaxy. The numbers indicate the reconstructed surface mass density in units of the critical one. (Credits: Henk Hoekstra.)*