КЛОЧКОВ В.В.
ЮЛЬМЕТОВ А.Р.
АГАНОВ А.В.

МЕХАНИКА

Конспекты лекций для студентов
нефизических специальностей

КАЗАНЬ 2013

Содержание

1. Введение

ФИЗИКА — по-гречески — ПРИРОДА, это *наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы ее движения*.

Физика проникает в другие науки — химическая физика (раздел химии, изучающий строение и свойства вещества а также описывает химические процессы как физические акты), физическая химия (объясняет химические явления на основе принципов физики).

Разделы химии — химическая термодинамика, электрохимия, фотохимия, радиохимия — напрямую вытекают из физических представлений и описаний.

Методы, основанные на физических явлениях широко используются в химические исследования — рентгеноструктурный анализ, электронография, нейтронография, оптическая спектроскопия (УФ, ИК, КР), радиоспектроскопия (ЭПР, ЯМР, ЯКР, γ-резонансная спектроскопия), микроскопия и другие.

Изучение общей физики имеет большое значение в формировании научного мировоззрения специалиста. Курс общей физики состоит из пяти разделов: *1. механика, 2. молекулярная физика, 3. электричество и магнетизм, 4. оптика, 5. атомная и ядерная физика*.

Мы приступаем к изучению основ классической нерелятивистской механики, справедливой для макроскопических тел (т. е. больших по сравнению с атомами и молекулами, когда квантовые эффекты не проявляются), движущихся со скоростями $v \ll c$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

Механика — учение о простейшей форме движения материи, которое состоит *в перемещении тел или их частей друг относительно друга*.

Для описания движения необходимо выбрать систему отсчета, связать ее с каким либо телом и задать способ отсчета времени.

Тела, относительно которых рассматривается изучаемое движение, называются телами отсчета (например, стены лаборатории, Земля…).

Обычно с этими телами связывают систему координат. Мы будем пользоваться правой прямоугольной Декартовой системой координат X, Y, Z.

Системой отсчета называется система координат, снабженная часами и жестко связанная с абсолютно твердым телом.

Абсолютно твердым телом называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остается неизменным.

При экспериментальном исследовании физических явлений проводят измерения. Измерить какую-либо величину означает найти ее отношение к величине такого вида, принятой за единицу.

1.1. Основные единицы измерения (система СИ)

1. ДЛИНА — метр. (м), [L]

2. МАССА — килограмм. (кг), [m]

3. ВРЕМЯ — секунда. (с), [t]

4. СИЛА ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА — ампер. (А), [I]

5. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕМПЕРАТУРА — кельвин. (К) [T]

$$T[\text{К}] = 273{,}15 + t[^\circ\text{C}],$$

6. КОЛИЧЕСТВО ВЕЩЕСТВА — моль (моль); равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов (атомов, молекул, ионов, электронов и других частиц) сколько атомов находится в углероде-12 (C^{12}), массой 0,012 кг: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль — число Авогадро, например, масса моля кислорода O_2 $M_{O_2} = 0{,}032$ кг/моль, азота N_2 $M_{N_2} = 0{,}028$ кг/моль,

7. СИЛА СВЕТА — кандела (свеча по-латински) (кд).

1.2. Дополнительные единицы измерения (система СИ)

1. ПЛОСКИЙ УГОЛ — радиан (рад); он равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу; 360° соответствует 2π рад, отсюда 1 рад = 360°/2π = 57,3°;

2. ТЕЛЕСНЫЙ УГОЛ — стерадиан (ср); это угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную R^2; полный телесный угол равен 4π ср.

ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЦЫ, например, Н, Дж, Вт, В, Ом, и другие, образуются из основных и дополнительных единиц измерения.

Классическую механику подразделяют на кинематику и динамику, из которой выделяют раздел статику, в которой изучают условия равновесия тел.

2. Кинематика материальной точки

Кинематика — раздел механики, в котором изучается движение тел без рассмотрения причин, вызывающих движение.

Поступательное движение — при котором любая прямая, связанная с движущимся телом остается параллельная самой себе.

Вращательное движение — при котором все точки тела двигаются по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

2.1. Основные понятия векторного анализа

Величины, характеризующиеся как числовым значением, так и направлением называются вектора (*скорость, ускорение, сила*) (как пример – траектория и перемещение, рисунок 1).

Величины, для задания которых достаточно только одного численного значения называют скалярами (путь, время, масса).

Обозначения: $\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{A}$, $|\boldsymbol{A}| = A$ модуль вектора $\boldsymbol{A}$,

Одинаковые по модулю коллинеарные направленные в одну сторону считаются равными, а направленные в разные стороны считаются отличающимися по знаку (рисунок 2).

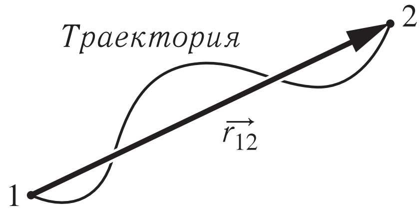


Рис. 1

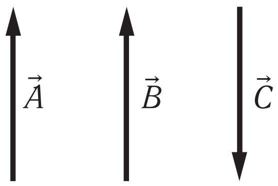


Рис. 2. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{C}$; $A = B = C$ или $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{C}|$

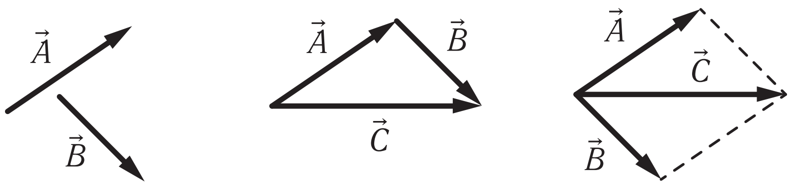


Рис. 3. Сложение векторов $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

Любой вектор можно разложить на составляющие: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

Введем единичный вектор $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{A}/|A|$, тогда в прямоугольных координатах $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{e}_x A + \boldsymbol{e}_y B$

Скалярное произведение векторов $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = AB \cos \alpha$.

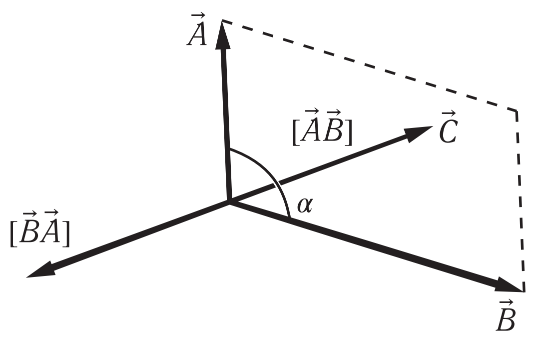


Рис. 4

Векторное произведение $\boldsymbol{C} = [\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}]$:

- $|\boldsymbol{C}| = C = AB \sin \alpha$
- вектор $\boldsymbol{C}$ перпендикулярен к плоскости, в которой лежат вектора $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, а направление его связано с направлениями векторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ по правилу правого винта (см. рисунок 4).

2.2. Путь, перемещение, скорость и ускорение

Изучение законов движения естественно начать с изучения движения тела, размерами которого можно пренебречь. Такое тело называют материальной точкой.

Движение материальной точки по отношению к системе отсчета может быть задано векторным или координатным способами.

При векторном способе положение точки A (рисунок 5) в момент времени t определяется ее радиусом вектором $\boldsymbol{r}$, проведенным из начала координат до движущейся точки.

Закон движения материальной точки в этом случае задается векторным уравнением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1}$$

При координатном способе положение точки A определяется координатами x, y, z, а закон ее движения задается тремя уравнениями:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t) \tag{2}$$

при этом

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные по модулю и взаимно перпендикулярные векторы-орты системы координат.

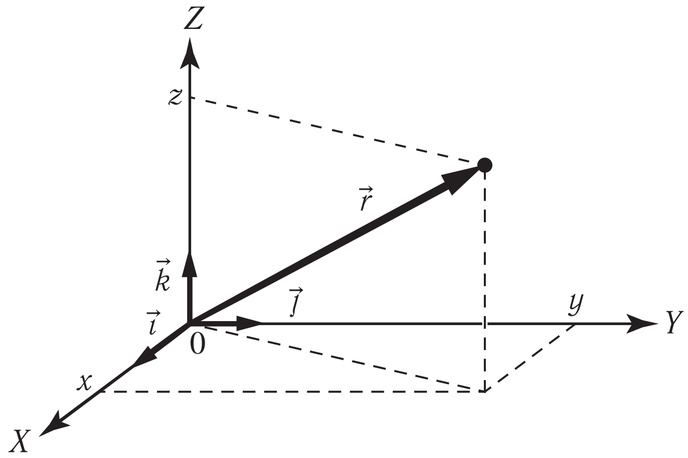


Рис. 5

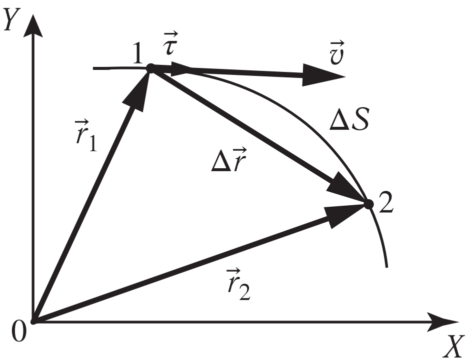


Рис. 6

Непрерывная линия, которую описывает точка при своем движении, называется траекторией (рисунок 6).

В зависимости от формы траектории различают прямолинейное движение и криволинейное движение (частный случай — движение по окружности)

Путь — это длина траектории, пройденная точкой.

За малый промежуток Δt времени точка пройдет путь ΔS.

Перемещение точки за промежуток времени Δt есть вектор $\Delta \boldsymbol{r}$, соединяющий положении точки в моменты t и $t + \Delta t$.

Из рисунка 6 видно, что вектор перемещения будет равен:

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 \tag{4}$$

2.3. Скорость

Мгновенная скорость материальной точки определяется как

$$\boldsymbol{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} \tag{5}$$

т. е. *мгновенная скорость* есть производная *радиуса-вектора по времени*.

Она направлена по *касательной к траектории* движущейся точки (в физике производная по времени может обозначаться точкой над знаком переменной величины).

Из рисунка 6 видно, что при $\Delta t \to 0$ $|\Delta \boldsymbol{r}| \to \Delta S$, поэтому модуль скорости

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta S}{\Delta t} \right) = \frac{dS}{dt} = \dot{S} \tag{6}$$

Можно описать движение через параметры траектории.

Радиус вектор становится сложной функцией вида $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}[S(t)]$, поэтому из (5) следует:

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dS} \right) \left(\frac{dS}{dt} \right) = V\boldsymbol{\tau}$$

где $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{r}/dS$ — единичный вектор, касательный к траектории, $V = dS/dt$ — модуль скорости движения материальной точки.

В системе СИ скорость измеряется в метрах в секунду (м/с).

С учетом формулы (3) из (5) получаем

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt} \right) \boldsymbol{\imath} + \left(\frac{dy}{dt} \right) \boldsymbol{\jmath} + \left(\frac{dz}{dt} \right) \boldsymbol{k} = \dot{x}\boldsymbol{\imath} + \dot{y}\boldsymbol{\jmath} + \dot{z}\boldsymbol{k} = V_x\boldsymbol{\imath} + V_y\boldsymbol{\jmath} + V_z\boldsymbol{k} \tag{7}$$

где

$$V_x = \dot{x} = dx/dt, \qquad V_y = \dot{y} = dy/dt, \qquad V_z = \dot{z} = dz/dt \tag{8}$$

— компоненты скорости, они равны производным соответствующих координат по времени.

На рисунке 6 $\boldsymbol{\tau}$ обозначает единичный касательный вектор, он совпадает с направлением скорости $\boldsymbol{V}$, поэтому

$$\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{\tau} \tag{9}$$

2.4. Ускорение

Для характеристики быстроты изменения скорости вводится векторная физическая величина, называемая ускорением $\boldsymbol{a}$.

Оно определяется аналогично скорости:

$$\boldsymbol{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \boldsymbol{V}}{\Delta t} \right) = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{10}$$

С учетом формул (7) и (8) из (10) находим

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{\imath} + a_y\boldsymbol{\jmath} + a_z\boldsymbol{k} \tag{11}$$

где

$$a_x = \ddot{x} = d^2x/dt^2, \quad a_y = \ddot{y} = d^2y/dt^2, \quad a_z = \ddot{z} = d^2z/dt^2 \tag{12}$$

— компоненты ускорения, они равны вторым производным соответствующих координат по времени.

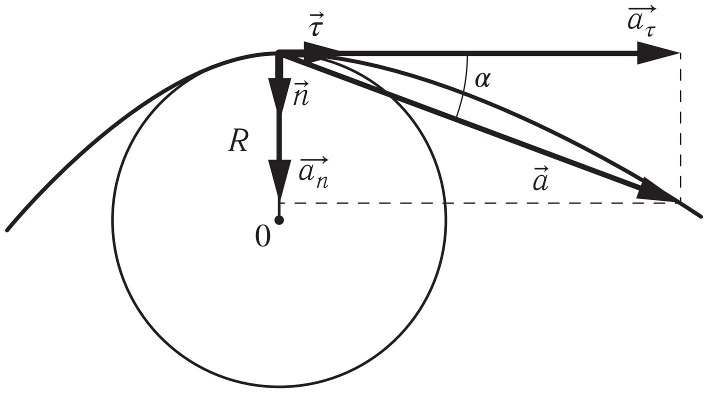


Рис. 7

2.5. Ускорение при криволинейном движении

Каждой точке траектории можно сопоставить окружность, которая сливается с траекторией на бесконечно малом ее участке.

Радиус этой окружности R, (см. рисунок 7), характеризует кривизну линии в рассматриваемой точке и называется радиусом кривизны.

Здесь R — радиус кривизны в данной точке траектории, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор нормали, $\boldsymbol{\tau}$ обозначает единичный касательный вектор, он совпадает с направлением скорости $\boldsymbol{V}$, при этом $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ перпендикулярны.

С учетом формул (9) из (10) получаем полное ускорение

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \frac{d(V\boldsymbol{\tau})}{dt} = \left(\frac{dV}{dt}\right)\boldsymbol{\tau} + V\left(\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right) \tag{13}$$

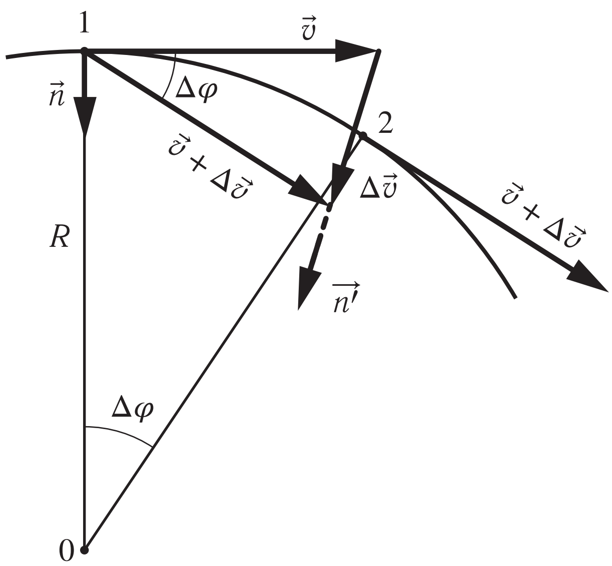


Рис. 8

Можно показать (рисунок 8), что

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{dV}{dt}\right)\boldsymbol{\tau} + \left(\frac{V^2}{R}\right)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n$$

где

$$\boldsymbol{a}_n = \left(V^2/R\right) \boldsymbol{n}$$

— *нормальное ускорение*, оно характеризует быстроту изменения *направления вектора скорости* и всегда направлено к центру кривизны траектории;

$$\boldsymbol{a}_\tau = (dV/dt)\, \boldsymbol{\tau}$$

— *касательное* или *тангенциальное* ускорение. По величине оно характеризует быстроту изменения *модуля скорости*.

Итак, получим выражение для нормального ускорения. Для этого вначале рассмотрим движение материальной точки по окружности:

$$\Delta\varphi = \Delta S/R; \qquad \Delta \boldsymbol{V} = |\Delta \boldsymbol{V}| \boldsymbol{n}' \approx v \Delta\varphi \boldsymbol{n}'$$

$$\boldsymbol{a}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{V}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V}{R} \frac{\Delta S}{\Delta t} \boldsymbol{n}'$$

Откуда, с учетом того, что скорость определяется как

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{dt} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}$$

а направление вектора $\boldsymbol{n}'$ приближается к направлению вектора нормали $\boldsymbol{n}$, получим выражение для *нормального* ускорения:

$$\boldsymbol{a}_n = (V^2/R) \boldsymbol{n}$$

Отметим, что при ускоренном движении $dV/dt > 0$ и $\boldsymbol{a}_\tau$ совпадает по направлению со скоростью $\boldsymbol{V}$, при замедленном движении $dV/dt > 0$ и $\boldsymbol{a}_\tau$ противоположно скорости $\boldsymbol{V}$.

На рисунке 7 показаны векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{a}_\tau$ для случая ускоренного движения.

Модуль ускорения точки будет определяться следующим образом:

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(dV/dt)^2 + (V^2/R)^2} \tag{14}$$

Ускорение измеряется в метрах на секунду в квадрате (м/с^2).

2.6. Пройденный путь

В общем виде неравномерного движения путь определяется как:

$$S = \int V(t) dt$$

Равномерное движение $V(t) = V_0$, тогда $S = V_0 t$. Равноускоренное движение $V(t) = V_0 + at$, $S = V_0 t + (at^2)/2$.

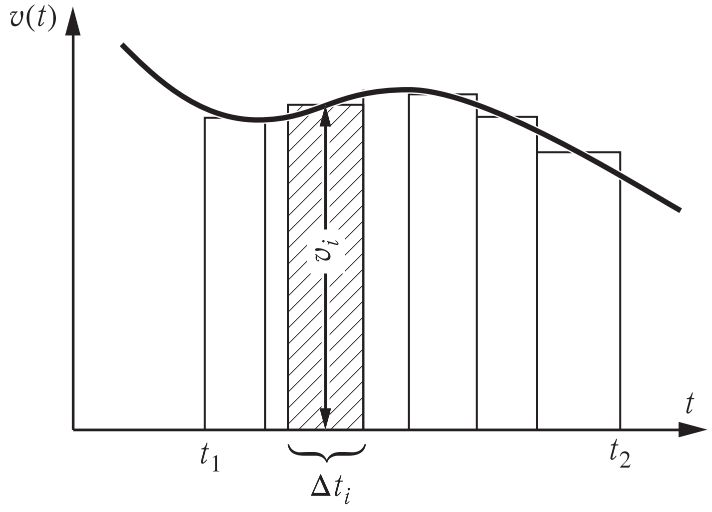


Рис. 9

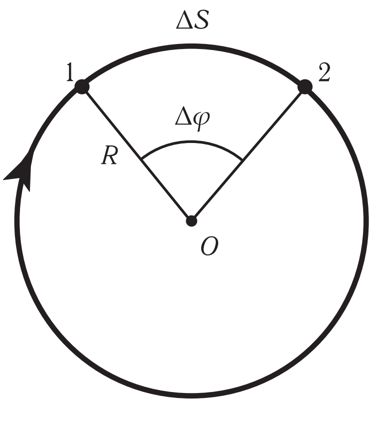


Рис. 10

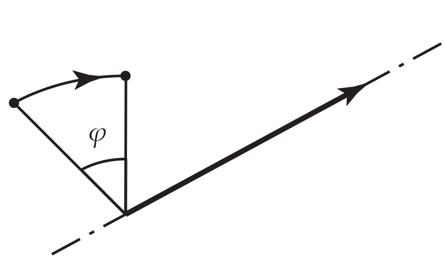


Рис. 11

2.7. Угловая скорость и угловое ускорение

Рассмотрим движение материальной точки по окружности радиуса R (рисунок 10). За время Δt точка повернется на угол $\Delta\varphi$, который является вектором угла поворота.

Величина угла поворота определяет модуль вектора $\Delta\varphi$, а *мгновенное направление* вектора перпендикулярно к плоскости, в которой движется материальная точка и определяется по правилу правого винта (см. рисунок 11).

Определим угловую скорость как:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right) = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \tag{15}$$

Угловая скорость измеряется в радианах в секунду: $[\omega]$ = рад/с.

Так как $\Delta S = \Delta\varphi R$ то

$$V = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = R\omega \tag{16}$$

Связь между векторами $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{\omega}$ представлена на рисунке 12:

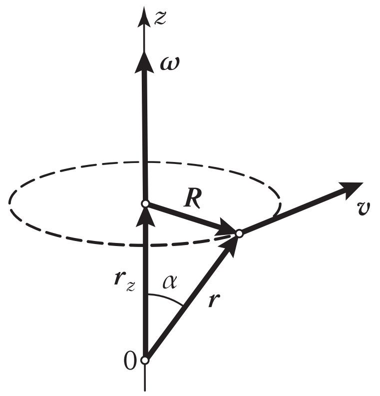


Рис. 12

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости, т.е.

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \tag{17}$$

Оно связано с касательным ускорением формулой

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)R = \beta R \tag{18}$$

Угловое ускорение измеряется в радианах на секунду в квадрате (рад/с^2).

С учетом формул (16) и (17) находим связь между ускорениями

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\beta R)^2 + (\omega^2 R)^2} = R\sqrt{\beta^2 + \omega^2} \tag{19}$$

3. Динамика материальной точки

Динамика — это *раздел механики, посвященный изучению движения материальных тел под действием приложенных к ним сил*.

В основе динамики лежат три закона Ньютона, сформулированные в 1687 г. Они явились обобщением работ его предшественников и современников: Кеплера, Галилея, Гюйгенса, Гука и др.

3.1. Первый закон Ньютона (закон инерции)

Тело (материальная точка), не подверженное внешним воздействиям, либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно.

Свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называют инерцией тела.

Количественной мерой инерции тела является его масса (единица измерения в системе СИ — кг).

Первый закон Ньютона выполняется не во всех системах отсчета.

Классическая механика постулирует, что *существует система отсчета, в которой все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно*.

Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется инерциальной системой отсчета.

Всякая система отсчета, движущаяся по отношению к инерциальной системе отсчета равномерно и прямолинейно, будет также инерциальной системой отсчета.

Лабораторная (земная) система отсчета является неинерциальной системой отсчета из-за суточного вращения Земли. Однако, это вращение медленное

$$\omega = \frac{\varphi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7{,}2 \cdot 10^{-5}\ \text{рад/с}$$

и для решения большинства задач инерциальной системой отсчета можно считать систему, жестко связанную с Землей.

3.2. Второй закон Ньютона

Для того, чтобы сформулировать второй закон Ньютона введем понятие силы.

Силой называется векторная величина, характеризующая воздействие на данное тело со стороны других тел.

Сила $\boldsymbol{F}$ полностью задана, если указаны ее модуль F, направление в пространстве и точка приложения.

Зададим способ измерения силы с помощью пружинной системы (рисунок 13, слева).

Умозрительно можно заключить, что, увеличивая нагрузку, мы удлиняем пружину кратно количеству грузов. Используя предложенный способ определения силы можно установить (рисунок 13, справа), что для материальной точки справедливо следующее утверждение: ускорение, вызываемое силой, обратно пропорционально массе, т.е.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m \tag{20}$$

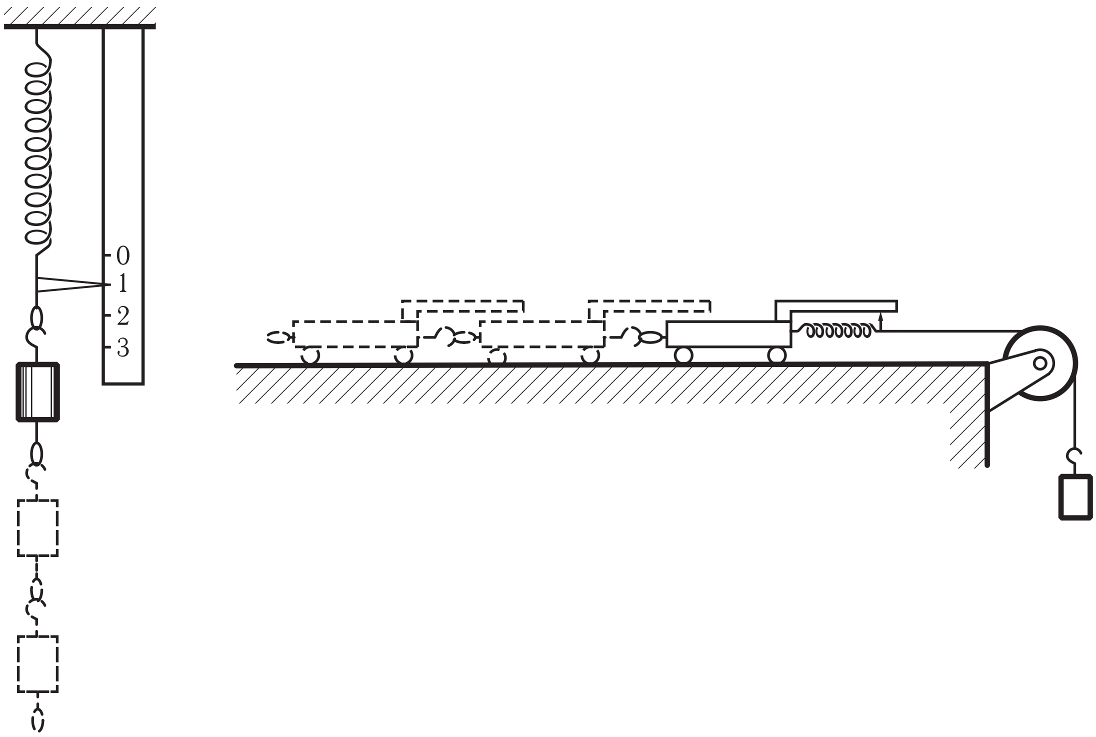


Рис. 13

Сила — величина векторная, что может быть установлено с помощью эксперимента, схема которого приведена на рисунке 14.

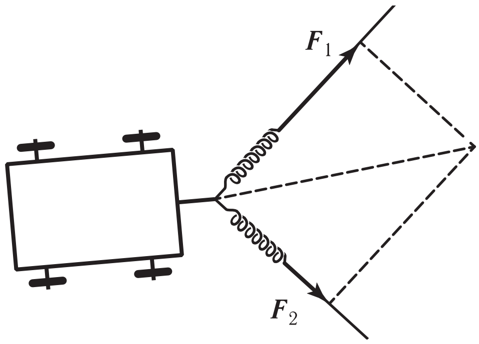


Рис. 14

Уравнение (20) называется уравнением движения материальной точки и его можно переписать в другой форме

$$\frac{dm\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{21}$$

или

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{22}$$

где

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V} \tag{23}$$

— импульс материальной точки.

В теоретической механике, вектор $\boldsymbol{p}$ называется *количеством движения*. Уравнение, записанное в форме (22), утверждает, что *скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе*.

Это утверждение называют вторым законом Ньютона, а соответствующее ему уравнение (22) — уравнением движения.

Уравнение (22) дает также количественное определение силы:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

Из уравнений (21) и (22) следует, что при $\boldsymbol{F} = 0$ ускорение $\boldsymbol{a} = 0$, т.е. тело движется равномерно и прямолинейно (или покоится).

Таким образом, I-й закон Ньютона, казалось бы, входит во второй закон как его частный случай. Несмотря на это, I-й закон формулируется независимо от второго, поскольку в нем содержится утверждение о *существовании в природе инерциальных систем отсчета*.

Из (20) следует, что модуль силы равен:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$$

В СИ за единицу силы принимается Ньютон: 1 Н = 1 кг · м/с^2.

3.3. Третий закон Ньютона

Воздействие тел друг на друга всегда носит характер взаимодействия.

Если тело 2 действует на тело 1 с силой $\boldsymbol{F}_{12}$,то и тело 1 действует на тело 2 с силой $\boldsymbol{F}_{21}$.

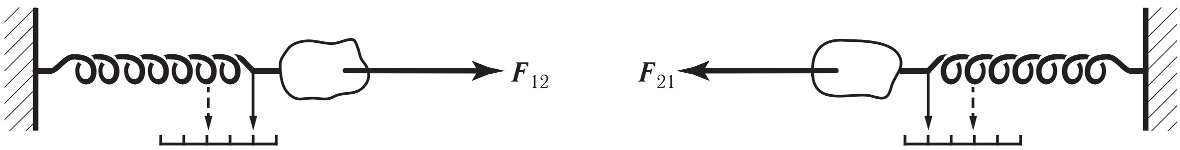


Рис. 15

Третий закон Ньютона утверждает, что *силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки*:

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \tag{24}$$

Таким образом, силы всегда попарно возникают, они приложены к разным телам, и могут уравновесить друг друга.

3.4. Силы

Все силы, встречающиеся в природе, сводятся к силам гравитационного притяжения, электромагнитным силам, слабым и сильным взаимодействиям.

В механике различают гравитационные силы, упругие силы и силы трения.

3.4.1. Сила гравитации, сила тяжести и вес

Сила гравитационного взаимодействия двух материальных точек

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (25)$$

Здесь r — расстояние между точками, m_1 и m_2 — их массы, G — коэффициент пропорциональности, называемый гравитационной постоянной,

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$$

Вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением, которое называют *ускорением свободного падения* $g = 9{,}81$ м/с^2.

Отсюда вытекает — на всякое тело действует сила

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$$

которую называют силой тяжести.

Вес тела — это сила $\boldsymbol{G}$, с которой тело действует на подвес или опору вследствие гравитационного притяжения к Земле (рисунок 16).

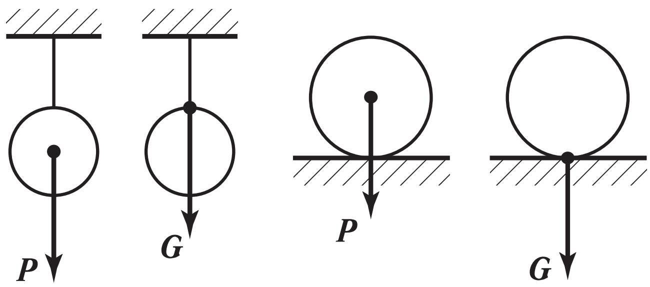


Рис. 16

Рассмотрим, как меняется вес тела при движении этого тела внутри «лифта», движущегося с различным ускорением (рисунок 17).

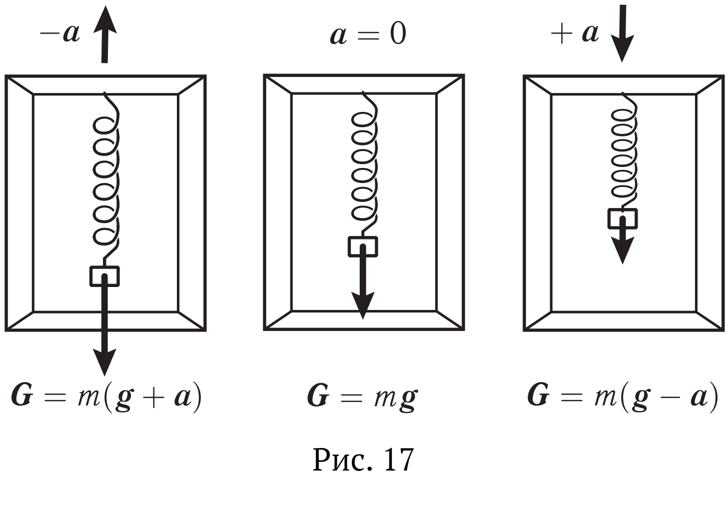


Рис. 17

3.4.2. Упругие силы

Они возникают при деформации тела и направлены в сторону обратную смещению (рисунок 18). Для малых деформаций справедливо (закон Гука):

$$F_x = -kx \tag{26}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

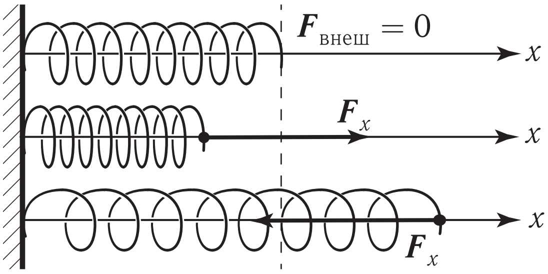


Рис. 18

3.4.3. Силы трения

Они появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей друг относительно друга.

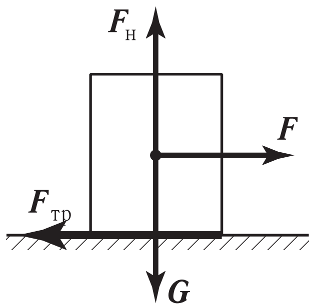


Рис. 19

Сила трения движущихся относительно друг друга твердых тел определяется как:

$$F_{\text{тр}} = \mu F_n \tag{27}$$

где F_n — сила нормального давления, μ — коэффициент трения, зависящий от используемого материала.

Трение между частями одного и того же тела (жидкости или газа) называется внутренним трением. При небольших скоростях сила трения определяется как:

$$\boldsymbol{F}_{\text{тр}} = -r\boldsymbol{V} \tag{28}$$

где r — коэффициент сопротивления, имеющий размерность [кг/с].

3.5. Закон сохранения импульса

Совокупность тел, выделенных для рассмотрения, называется механической системой. Система, в которой внешние силы отсутствуют, называется замкнутой.

Для замкнутой системы остаются постоянными (сохраняются) три физические величины: импульс, энергия и момент импульса. Соответственно формулируются три закона сохранения.

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек (как пример система из трех точек, см. рисунок 20).

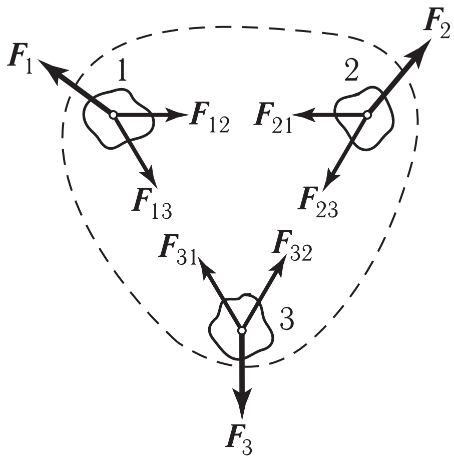


Рис. 20

Обозначим через $\boldsymbol{F}_{ik}$ силу, с которой материальная точка k действует на i-ю материальную точку (т.е. $\boldsymbol{F}_{ik}$ — это внутренняя сила). Обозначим через $\boldsymbol{F}_i$ результирующую всех внешних сил, действующих на i-тую материальную точку. Тогда, согласно второму закону Ньютона ($d\boldsymbol{p}/dt = \boldsymbol{F}$)

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} &= \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + \dots + \boldsymbol{F}_{1n} + \boldsymbol{F}_1 \\ \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} &= \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23} + \dots + \boldsymbol{F}_{2n} + \boldsymbol{F}_2 \\ &\vdots \\ \frac{d\boldsymbol{p}_n}{dt} &= \boldsymbol{F}_{n1} + \boldsymbol{F}_{n2} + \dots + \boldsymbol{F}_{n,n-1} + \boldsymbol{F}_n \end{aligned} \tag{29}$$

Сложим все эти уравнения

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i = (\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21}) + (\boldsymbol{F}_{13} + \boldsymbol{F}_{31}) + \dots + (\boldsymbol{F}_{1n} + \boldsymbol{F}_{n1}) + \dots$$
$$\dots + (\boldsymbol{F}_{n-1,n} + \boldsymbol{F}_{n,n-1}) + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{30}$$

Согласно третьему закону Ньютона ($\boldsymbol{F}_{ik} = -\boldsymbol{F}_{ki}$) каждая из скобок равна нулю. Следовательно, сумма внутренних сил, действующих на тела системы всегда равна нулю, т.е.

$$\sum_{\substack{i,k=1\\i\neq k}}^{n} \boldsymbol{F}_{ik} = 0 \tag{31}$$

С учетом этого из (30) получим

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \tag{32}$$

Введем понятие импульса системы

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i \tag{33}$$

С учетом этого из (32) находим

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{внешн}} \tag{34}$$

где

$$\boldsymbol{F}_{\text{внешн}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

т.е. *производная по времени импульса системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на тела системы*.

Если $\boldsymbol{F}_{\text{внешн}} = 0$, то соответственно $\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = 0$ и, следовательно,

$$\boldsymbol{P} = \text{const} \tag{35}$$

Итак, *если геометрическая сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то импульс замкнутой системы сохраняется*. Это утверждение представляет собой *закон сохранения импульса*.

3.6. Центр масс и закон его движения

В динамике широко используется понятие центра масс системы материальных точек, который обычно обозначают буквой C.

Положение центра масс определяется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{r}_i \tag{36}$$

Здесь m_i — масса i-той материальной точки, $\boldsymbol{r}_i$ — радиус-вектор, $m = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$ — суммарная масса системы.

В однородном поле сил тяжести центр масс совпадает с центром тяжести системы.

Скорость центра масс определяется как:

$$\boldsymbol{V}_C = \frac{d\boldsymbol{r}_C}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{V}_i = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i = \frac{\boldsymbol{P}}{m} \tag{37}$$

где $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i$— импульс системы

Согласно (37) импульс системы

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{V}_C \tag{38}$$

Подставив (38) в (34), получим уравнение движения центра масс

$$\frac{d(m\boldsymbol{V}_C)}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{внешн}} \tag{39}$$

Таким образом, *центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе системы, под действием результирующей всех внешних сил, приложенных к телам системы*.

Для замкнутой системы $\boldsymbol{F}_{\text{внешн}} = 0$ и, следовательно,

$$\boldsymbol{V}_C = \text{const} \tag{40}$$

это означает, что *центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно, либо покоится*.

3.7. Реактивное движение

3.7.1. Движение тел с переменной массой

Выведем уравнение движения материальной точки с переменной массой на примере движения ракеты.

Пусть $m(t)$ — масса ракеты в момент времени t, $\boldsymbol{V}(t)$ — ее скорость в тот же момент времени, а μ — скорость убыли ее массы [$\mu = (dm/dt)$] за счет истечения газов.

Импульс ракеты в этот момент будет $m\boldsymbol{V}$.

В следующий момент времени $(t + dt)$ ракета будет иметь массу $m - \mu dt$, а ее скорость получит приращение $d\boldsymbol{V}$ и будет равна $\boldsymbol{V} + d\boldsymbol{V}$.

Отделившиеся от ракеты газы будут иметь относительно Земли скорость $\boldsymbol{V}_{\text{газа}}$.

Тогда импульс ракеты в момент времени $(t + dt)$ равен:

$$(m - \mu dt)(\boldsymbol{V} + d\boldsymbol{V}),$$

а импульс газов равен $\mu\boldsymbol{V}_{\text{газа}}dt$.

Изменение импульса всей системы (ракета + ее газы) за время dt будет равно:

$$(m - \mu dt)(\boldsymbol{V} + d\boldsymbol{V}) + \mu\boldsymbol{V}_{\text{газа}}dt - m\boldsymbol{V} = -\mu d\boldsymbol{V}dt + md\boldsymbol{V} + \mu(\boldsymbol{V}_{\text{газа}} - \boldsymbol{V})dt \tag{41}$$

В уравнении (41), $\mu d\boldsymbol{V}dt$ как членом второго порядка малости можно пренебречь.

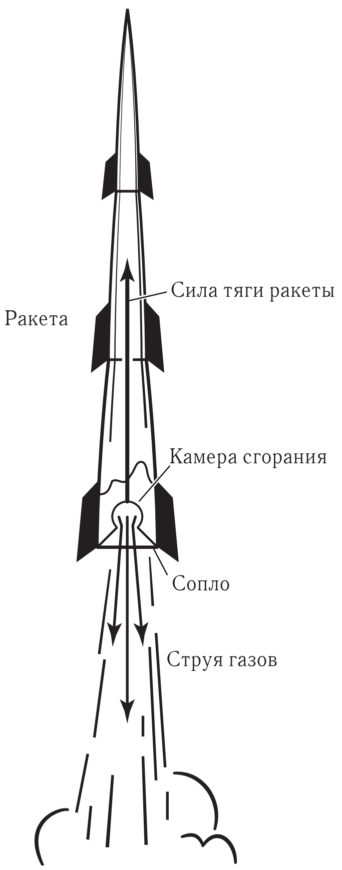


Рис. 21

Согласно второму закону Ньютона скорость изменения импульса за время dt равна внешней силе, действующей на это тело за это время, т. е.: $d\boldsymbol{p}/dt = \boldsymbol{F}$.

С учетом (41) находим

$$m d\boldsymbol{V}/dt + \mu(\boldsymbol{V}_{\text{газа}} - \boldsymbol{V}) = \boldsymbol{F} \tag{42}$$

или

$$m d\boldsymbol{V}/dt = \boldsymbol{F} - \mu \boldsymbol{V}_{\text{отн}}, \tag{43}$$

где $\boldsymbol{V}_{\text{отн}} = \boldsymbol{V}_{\text{газа}} - \boldsymbol{V}$ — скорость истечения газов относительно ракеты.

Уравнение (43) называют уравнением Мещерского или уравнением движения точки с переменной массой.

Если $\boldsymbol{F} = 0$, то уравнение (43) переходит в уравнение вида:

$$m d\boldsymbol{V}/dt = -\boldsymbol{V}_{\text{отн}} dm/dt, \tag{44}$$

решая которое можно получить:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{\text{отн}} \ln(m_0/m), \tag{45}$$

где m_0 — начальная стартовая масса ракеты (когда $\boldsymbol{V} = 0$).

Максимальная скорость

$$\boldsymbol{V}_{\text{макс}} = \boldsymbol{V}_{\text{отн}} \ln[m_0/(m_0 - m_{\text{топл}})], \tag{46}$$

где $m_{\text{топл}}$ — масса топлива и окислителя. Формула (43) называется формулой *Циолковского*.

3.8. Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея

Если системы отсчета движутся относительно друг друга *равномерно и прямолинейно* и в одной из них *справедлив I-й закон Ньютона*, то эти *системы являются инерциальными*.

Галилей установил: *во всех инерциальных системах отсчета законы классической механики имеют одинаковую форму*.

Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью $\boldsymbol{V}_0$, вдоль направления OX.

Одну из них обозначим буквой K и будем считать неподвижной, другую, которая движется со скоростью $\boldsymbol{V}_0$ обозначим K'.

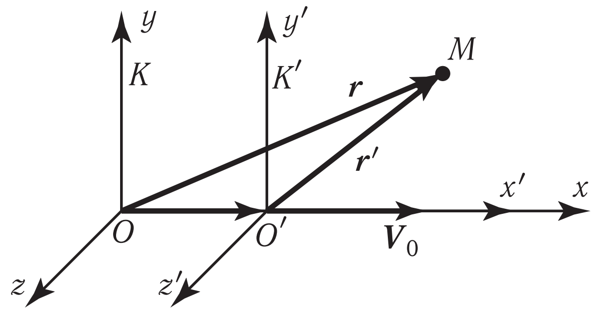


Рис. 22

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ начало O совпадает с O'. Пусть в момент времени t движущаяся точка находится в положении M, тогда $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OO}' + \boldsymbol{r}'$, причем $\boldsymbol{OO}' = \boldsymbol{V}_0 t$.

Таким образом,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{V}_0 t + \boldsymbol{r}'; \quad t = t' \tag{47}$$

Запишем (47) в проекциях систем координат

$$x = x' + V_0 t, \quad y = y', \quad z = z'; \quad t = t' \tag{48}$$

Формулы обратного преобразования имеют вид

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}_0 t; \quad t' = t \tag{49}$$

$$x' = x - V_0 t, \quad y' = y, \quad z' = z; \quad t' = t \tag{50}$$

Формулы (48) или (50) носят название преобразований координат Галилея.

Соотношения (47)–(50) справедливы лишь в рамках классической механики, когда $V \ll c$.

Дифференцируя (47) по времени t, получим

$$d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{V}_0 + d\boldsymbol{r}'/dt \quad \text{или} \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{V}' \tag{51}$$

где $\boldsymbol{V}$ - скорость точки M в системе отсчета K, а $\boldsymbol{V}'$ — в системе K'.

Дифференцируя (51) в предположении $\boldsymbol{V}_0 = \text{const}$, получим

$$d\boldsymbol{V}/dt = d\boldsymbol{V}'/dt \quad \text{или} \quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \tag{52}$$

Следовательно, уравнение движения $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ не изменяется при переходе от одной инерциальной системы к другой. Таким образом: *уравнения механики Ньютона инвариантны относительно преобразований Галилея*.

Это утверждение носит название *принципа относительности Галилея* — никакими механическими опытами, проведенными внутри системы отсчета, нельзя установить, находится ли система в покое или движется равномерно и прямолинейно.

3.9. Неинерциальные системы отсчета

Если тело движется относительно инерциальных систем с ускорением $\boldsymbol{a}$, то относительно неинерциальной системы это ускорение равно $\boldsymbol{a}'$. Обозначим $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{w}$.

Пусть результирующая всех сил, действующих на тело равна $\boldsymbol{F}$, тогда в соответствии со вторым законом Ньютона $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$.

Тогда ускорение относительно неинерциальной системы можно представить как:

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}/m - \boldsymbol{w}$$

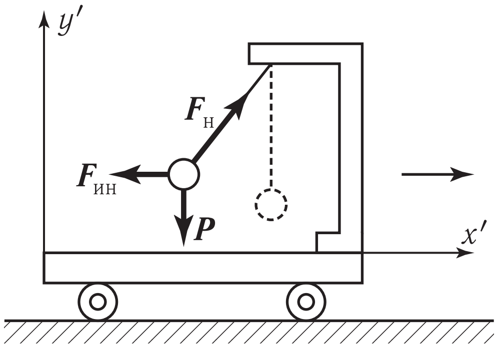


Рис. 23

Таким образом, даже если $\boldsymbol{F} = 0$, то по отношению к неинерциальной системе тело будет двигаться с ускорением, так как бы на него действует сила

$$\boldsymbol{F}_{ин} = -\boldsymbol{w}m$$

Уравнение второго закона Ньютона в неинерциальной системе будет иметь вид:

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{ин} \tag{53}$$

3.10. Центробежная сила инерции

Диск вращается со скоростью $\boldsymbol{\omega}$, с диском вращается шарик массой m надетый на спицу (рисунок 24).

Сила, с которой шарик будет растягивать пружину, равна

$$\boldsymbol{F}_{пр} = m\boldsymbol{a}_n \tag{54}$$

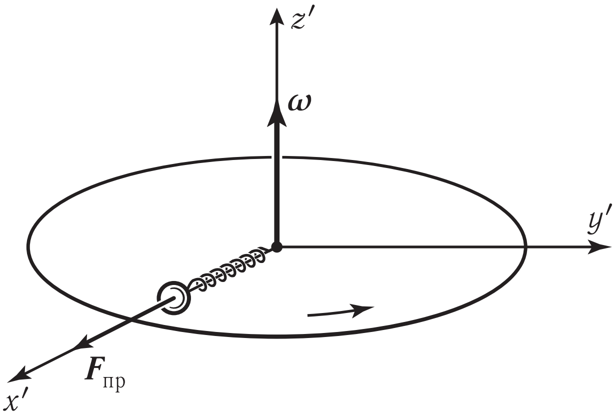


Рис. 24

где $\boldsymbol{a}_n$ — нормальное ускорение. Это ускорение равно:

$$-\boldsymbol{a}_n = \omega^2 \boldsymbol{R}$$

тогда

$$\boldsymbol{F}_{пр} = -m\omega^2 \boldsymbol{R} \qquad (55)$$

Относительно системы отсчета, связанной с диском шарик покоится. Кроме действия пружины на шарик действует сила инерции:

$$\boldsymbol{F}_{цб} = -\boldsymbol{F}_{пр} = m\omega^2 \boldsymbol{R} \qquad (56)$$

— ее называют центробежной силой инерции.

Эта сила будет действовать на тело во вращающейся системе отсчета независимо от того, покоится это тело или движется относительно нее.

3.11. Сила Кориолиса

Как определить силу Кориолиса (рисунок 25):

$$R = V't$$

$$S = R\Delta\varphi = R\omega t = V't\omega t = V'\omega t^2$$

С другой стороны:

$$S_{AB} = at^2/2$$

Отсюда модуль Кориолисова ускорения равен:

$$a = 2V'\omega$$

Тогда силу Кориолиса определяем как:

$$F_{кор} = 2mV'\omega \qquad (57)$$

В векторной форме :

$$\boldsymbol{F}_{кор} = 2m[\boldsymbol{V}'\boldsymbol{\omega}] \qquad (58)$$

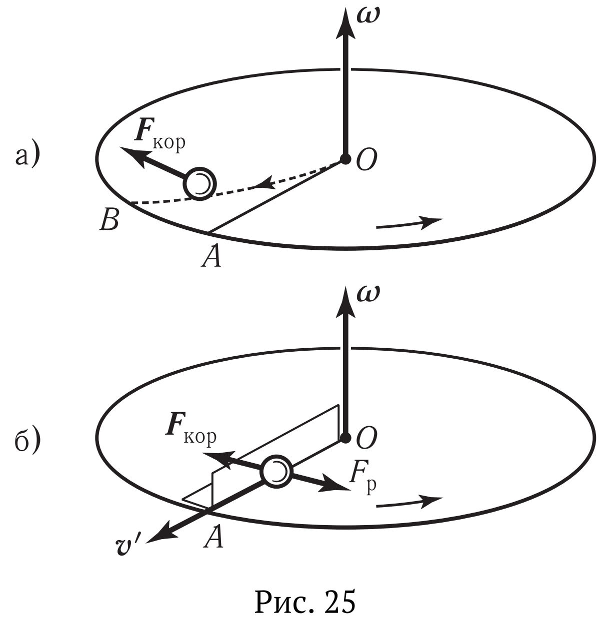


Рис. 25

3.12. Постулаты частной теории относительности

Постоянство скорости света в вакууме во всех инерциальных системах отсчета известно под названием постулата Эйнштейна (1905 г.).

Другим постулатом является принцип относительности Эйнштейна: *законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета*.

Явления, описанные частной теории относительности называются *релятивисткими* и проявляются при движениях со скоростями, близкими к скорости света в вакууме — $c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ м/с.

Было показано, что:

$$\tau = \tau_0/\sqrt{1-(v^2/c^2)} = \tau_0/\sqrt{1-\beta^2} \tag{59}$$

при условии $\beta = v/c < 1$, а размеры тел в направлении движения сокращаются, т. е.

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} \tag{60}$$

Исходя из двух постулатов, Эйнштейн в 1905 г. вывел преобразования Лоренца.

Напишем их подобно преобразованиям Галилея:

$$x = x' + Vt'/\sqrt{1-\beta^2}, \quad y = y', \quad z = z'; \quad t = [t' + (Vx'/c^2)]/\sqrt{1-\beta^2} \tag{61}$$

$$x' = x - Vt/\sqrt{1-\beta^2}, \quad y' = y, \quad z' = z; \quad t' = [t - (Vx/c^2)]/\sqrt{1-\beta^2} \tag{62}$$

Для медленных движений преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея.

4. Работа, мощность

Элементарной работой dA силы $\boldsymbol{F}$ на малом перемещении $d\boldsymbol{r}$ точки M приложения силы называется скалярное произведение $\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$:

$$dA = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{V}dt \tag{63}$$

или

$$dA = |\boldsymbol{F}||d\boldsymbol{r}|\cos\alpha = FdS\cos\alpha = F_\tau dS \tag{64}$$

где $dS = |d\boldsymbol{r}|$ — путь точки M за малое время dt, α — угол между силой $\boldsymbol{F}$ и элементарным перемещением $d\boldsymbol{r}$, $F_\tau = F\cos\alpha$ — проекция силы $\boldsymbol{F}$ на направление $d\boldsymbol{r}$ (или $\boldsymbol{v}$).

Работа A_{12}, совершаемая силой $\boldsymbol{F}$ на конечном перемещении точки ее приложения M из положения 1 в положение 2, равна сумме элементарных работ на всех участках траектории точки M от 1 до 2:

$$A_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = \int_{S_1}^{S_2} F_\tau dS \tag{65}$$

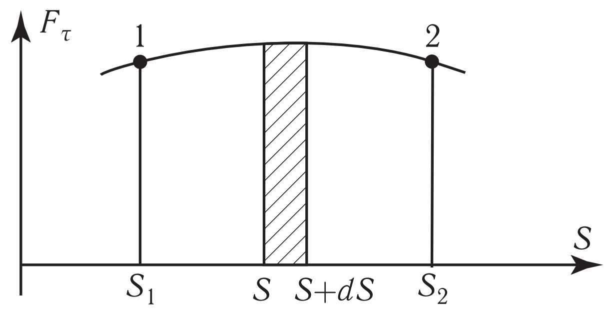


Рис. 26

Если зависимость задана графически (рисунок 26), то элементарная работа (64)

$$da = F_\tau dS$$

численно равна площади заштрихованной площадки. Работа A_{12} будет численно равна площади криволинейной трапеции $S_1 12 S_2$.

Единицей работы в СИ служит джоуль (Дж), т.е. 1 Дж = 1 Н · 1 м.

Работа, совершаемая в единицу времени, называется *мощностью*:

$$P = dA/dt = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}/dt = \boldsymbol{FV} \tag{66}$$

Единицей мощности в СИ является ватт (Вт). 1 Вт = 1 Дж/1 с. Лошадиная сила (л. с.) равна 736 Вт = 75 кг м.

Консервативные и неконсервативные силы

Все силы, встречающиеся в механике, принято разделять на консервативные и неконсервативные.

Сила, действующая на материальную точку, называется *консервативной* (*потенциальной*), если работа этой силы зависит только от начального и конечного положений материальной точки (рисунок 27):

$$A_{1a2} = A_{ab2} = A_{12}$$

Изменение направления движения точки на противоположное вызывает изменение знака элементарной работы $dA = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$, следовательно, $A_{2b1} = -A_{1b2}$.

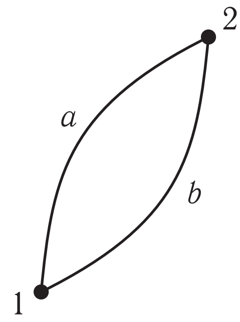


Рис. 27

Поэтому работа консервативной силы вдоль замкнутой траектории $1a2b1$ равна нулю:

$$A_{1a2b1} = A_{1a2} + A_{2b1} = A_{1a2} - A_{1b2} = 0$$

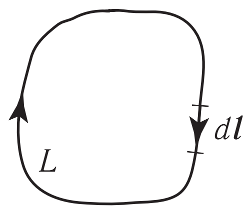


Рис. 28

Таким образом, работа консервативной силы по произвольной замкнутой траектории L точки (рисунок 28) ее приложения равна нулю:

$$\oint_L \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = 0 \quad \text{или} \quad \oint_L \boldsymbol{F}d\boldsymbol{l} = 0 \qquad (67)$$

Следует отметить, что силы тяготения и упругости являются консервативными, а силы трения неконсервативными.

4.1. Потенциальная энергия

Если на материальную точку действует консервативная сила, то можно ввести скалярную функцию координат точки $W_{\text{п}}(\boldsymbol{r})$, называемую *потенциальной энергией*. Потенциальную энергию определим следующим образом

$$W_{\text{п}}(\boldsymbol{r}) = A_{i0} + C \qquad (68)$$

где C — произвольная постоянная, а A_{i0} — работа консервативной силы при перемещении материальной точки из положения $\boldsymbol{r}_i$ в фиксированное положение $\boldsymbol{r}_0$.

Определим разность значений потенциальной энергии для точек 1 и 2 (см. рисунок 29) и воспользуемся тем, что $A_{20} = -A_{02}$

$$W_{\text{п}}(\boldsymbol{r}_1) - W_{\text{п}}(\boldsymbol{r}_2) = (A_{10} + C) - (A_{20} + C) = A_{10} - A_{20} = A_{10} + A_{02}$$

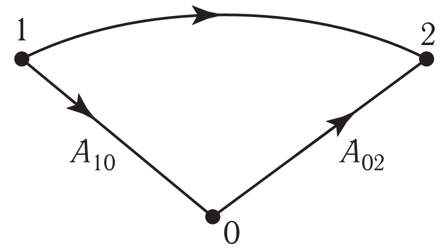


Рис. 29

Правая часть, полученного соотношения, дает работу, совершаемую на пути из точки 1 в точку 2, проходящем через точку O.

Вследствие независимости работы от формы пути такая же работа A совершается на любом другом пути, т.е.

$$A_{12} = W_{\text{п}}(\boldsymbol{r}_1) - W_{\text{п}}(\boldsymbol{r}_2) \tag{69}$$

Следовательно*, работа консервативных сил равна разности значений функции W_n в начальной и конечной точках пути*, т.е. убыли потенциальной энергии.

4.1.1. Примеры

Потенциальная энергия растянутой пружины. При возвращении пружины из деформированного состояния в недеформированное сила $\boldsymbol{F}$ совершает работу

$$A = \int_x^0 F dx = -k \int_x^0 x dx = \frac{kx^2}{2} \tag{70}$$

или

$$W_{\text{п}} = kx^2/2 \tag{71}$$

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести Земли. Потенциальная энергия тела массы m, находящегося в поле гравитации Земли, масса которой M,

$$W_{\text{п}} = -G\frac{Mm}{r} \tag{72}$$

Изменение потенциальной энергии тела массы m, поднятого с поверхности Земли ($r = R$, где R — радиус Земли) на высоту h ($r = R + h$), согласно (72), равно:

$$\Delta W_{\text{п}} = -GMm\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = \frac{GMmh}{(R+h)R} \tag{73}$$

если $h \ll R$, то формула (73) перейдет в известную формулу

$$\Delta W_{\text{п}} = \frac{GMmh}{R^2} = mgh \quad \text{или} \quad W_{\text{п}} = mgh \tag{74}$$

если потенциальную энергию на поверхности Земли принять равной нулю, где

$$GM/R^2 = g$$

— ускорение силы тяжести на поверхности Земли (рисунок 30).

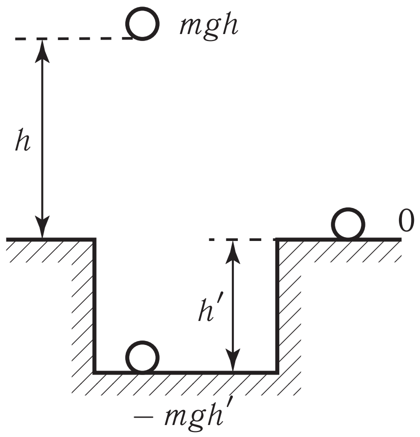


Рис. 30

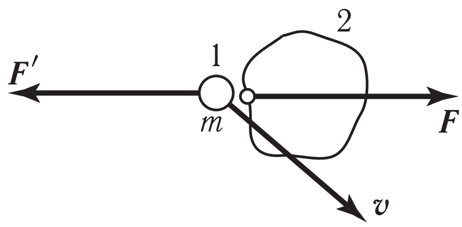


Рис. 31

4.2. Кинетическая энергия

Уравнение движения материальной точки массы m, движущейся под действием силы $\boldsymbol{F}$ есть:

$$m d\boldsymbol{V}/dt = \boldsymbol{F}$$

Умножим скалярно правую и левую часть равенства на перемещение точки $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{V}dt$, получим

$$m(d\boldsymbol{V}/dt)\boldsymbol{V}dt = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} \tag{75}$$

Так как скалярное произведение векторов $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V} = V^2$, получаем:

$$\boldsymbol{V}d\boldsymbol{V}/dt = d(V^2)/dt$$

Преобразуем, соотношение (75) [с учетом сокращения левой части уравнения на dt], к виду:

$$d(mV^2)/dt = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$$

Проинтегрируем части равенства вдоль траектории:

$$\int_1^2 d(mV^2/2) = \int_1^2 \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$$

Согласно определению работы переменной силы, получим соотношение:

$$m(v_2^2 - V_1^2)/2 = A_{12}$$

Величина

$$W_к = mV^2/2 = p^2/2m \tag{76}$$

называется кинетической энергией материальной точки.

$$A_{12} = W_{к2} - W_{к1} \tag{77}$$

Из соотношения (77) следует, что *работа результирующей всех сил*, действующих на материальную точку, расходуется на *приращение кинетической энергии этой частицы*.

Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит или на которые ее можно мысленно разделить:

$$W_к = \sum_{i=0}^{n} m_i V_i^2/2$$

4.3. Закон сохранения энергии в механике

Рассмотрим систему из n материальных точек, на которые действуют силы. Работа консервативных сил может быть представлена как убыль потенциальной энергии системы $W_п$:

$$A_{12конс} = W_{п1} - W_{п2}$$

Работу неконсервативных сил обозначим A^*.

Суммарная работа всех сил затрачивается на приращение кинетической энергии системы $W_к$, следовательно,

$$A_{12} = A_{12конс} + A_{12}^* = W_{п1} - W_{п2} + A_{12}^* = W_{к2} - W_{к1}$$

или

$$(W_{п2} + W_{к2}) - (W_{п1} + W_{к1}) = A_{12}^* \tag{78}$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии представляет собой полную механическую энергию E системы:

$$E = W_п + W_к \tag{79}$$

Таким образом

$$E_2 - E_1 = A_{12}^* \tag{80}$$

Очевидно, что если неконсервативные силы в системе отсутствуют, т.е. $A_{12}^* = 0$, то ее *полная механическая энергия остается постоянной* (сохраняется) т.е. $E = \mathrm{const}$.

Эту теорему называют законом сохранения механической энергии, он утверждает: *полная механическая энергия системы материальных точек*, находящихся под действием консервативных сил *остается постоянной*.

4.4. Упругое и неупругое соударения

При соударении тел они деформируются. При этом кинетическая энергия тел частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и во внутреннюю энергию тел. Рассмотрим центральные удары двух шаров, при которых они направлены вдоль прямой, проходящей через их центры (рисунок 32).

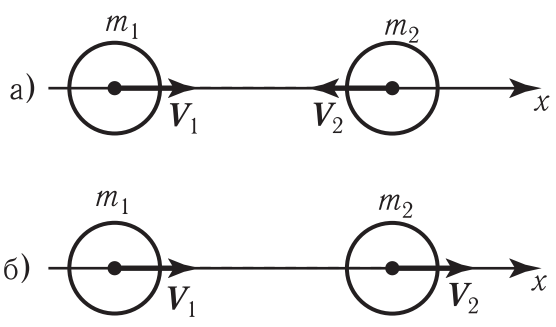


Рис. 32

4.4.1. Абсолютно неупругий удар

После такого удара тела движутся с одинаковыми скоростями. При этом выполняется только закон сохранения суммарного импульса тел:

$$m_1\boldsymbol{V}_1 + m_2\boldsymbol{V}_2 = (m_1 + m_2)\boldsymbol{U} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{U} = \frac{m_1\boldsymbol{V}_1 + m_1\boldsymbol{V}_2}{m_1 + m_2} \tag{81}$$

Изменение кинетической энергии определим как:

$$\Delta W_\text{к} = \frac{m_1 + m_2}{2}\boldsymbol{U}^2 - \left(\frac{m_1}{2}\boldsymbol{V}_1^2 + \frac{m_1}{2}\boldsymbol{V}_1^2\right) = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2)^2 < 0 \tag{82}$$

4.4.2. Абсолютно упругий удар

Это такой удар, при котором *полная механическая энергия тел сохраняется*.

В итоге потенциальная энергия *упругой деформации снова переходит в кинетическую* и тела разлетаются со скоростями, которые определяются исходя из законов сохранения суммарного импульса и полной механической энергии системы.

Обозначим массы шаров m_1 и m_2, скорости шаров до удара $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$, скорости шаров после удара $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_2$ и тогда:

$$m_1\boldsymbol{V}_1 + m_2\boldsymbol{V}_2 = m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2, \quad \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} \tag{83}$$

Найдем скорости шаров после абсолютно упругого удара:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{2m_2\boldsymbol{V}_2 + (m_1 - m_2)\boldsymbol{V}_1}{m_1 + m_2}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \frac{2m_1\boldsymbol{V}_1 + (m_1 - m_2)\boldsymbol{V}_2}{m_1 + m_2} \tag{84}$$

Спроектируем все векторы на ось x (рисунок 32):

$$u_{1x} = \frac{2m_2V_2 + (m_1 - m_2)V_1}{m_1 + m_2}, \quad u_{2x} = \frac{2m_1V_1 - (m_2 - m_1)V_2}{m_1 + m_2} \tag{85}$$

4.5. Равновесие системы. Потенциальные кривые

Область x_1–x_2 — потенциальная яма, x_0 — минимальное значение потенциальной энергии в этой области; x_2–x_3 — потенциальный барьер, для преодоления которого необходима дополнительная энергия.

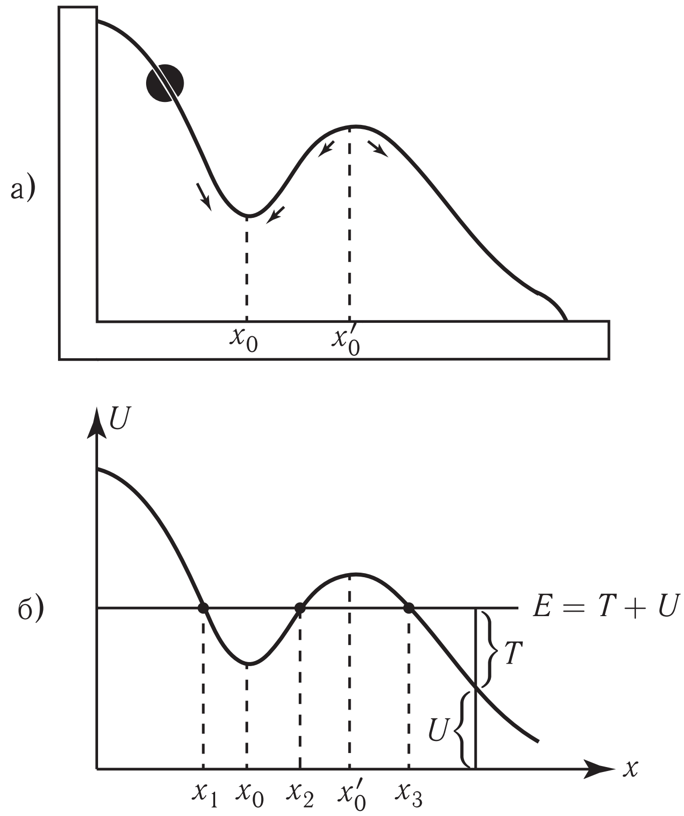


Рис. 33

5. Движение твердого тела

5.1. Момент силы и момент импульса

Пусть O — какая-либо неподвижная точка в инерциальной системе отсчета. Обозначим через $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор, проведенный из этой точки к точке приложения силы $\boldsymbol{F}$.

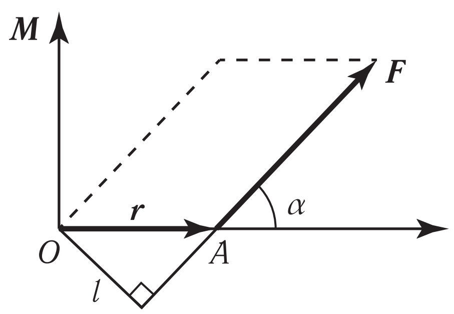


Рис. 34

Моментом силы $\boldsymbol{M}$ *относительно точки* O *называется векторное произведение радиуса-вектора* $\boldsymbol{r}$ *на силу* $\boldsymbol{F}$ (рисунок 34):

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}, \qquad M = rF \sin \alpha \,, \tag{86}$$

α угол между векторами $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{F}$; направление $\boldsymbol{M}$ выбирается так, чтобы последовательность векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$ образовывала правовинтовую систему.

Моментом $\boldsymbol{M}$ нескольких сил относительно точки называется векторная сумма моментов этих сил относительно той же точки

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \,. \tag{87}$$

Моментом импульса материальной точки относительно точки O называется векторное произведение радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ *на импульс* $\boldsymbol{p}$ (рисунок 35):

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}, \tag{88}$$

α угол между векторами $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{p}$; направление $\boldsymbol{L}$ выбирается так, чтобы последовательность векторов $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{M}$ образовывала правовинтовую систему.

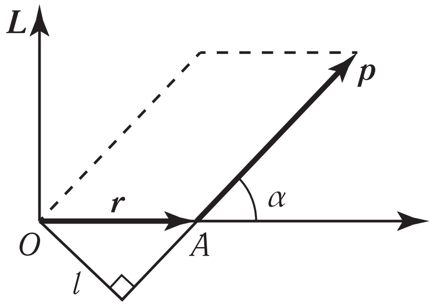


Рис. 35

Для системы N материальных точек моментом импульса относительно некоторой точки O называется векторная сумма моментов импульсов этих точек относительно того же начала:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \,. \tag{89}$$

5.2. Закон сохранения моментов импульса

Предположим, что точка O неподвижна. В случае одной материальной точки, дифференцируя (88), получаем

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \,.$$

При неподвижной точке O вектор $\boldsymbol{V}$, равный $d\boldsymbol{r}/dt$, параллелен $\boldsymbol{p}$ и поэтому

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} = 0 \,.$$

Кроме того

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \,.$$

Таким образом получаем

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}, \tag{90}$$

— *закон сохранения моментов импульса для материальной точки*.

Распространим его на систему материальных точек, для чего запишем уравнение (90) для каждой материальной точки механической системы, понимая под $\boldsymbol{M}$ момент всех действующих на нее сил, как внутренних так и внешних.

Внутренние силы входят в систему попарно так, что

$$\boldsymbol{F}_{ik} = \boldsymbol{F}_{ki}\,.$$

где $\boldsymbol{F}_{ik}$ — сила воздействия k-й материальной точки на i-ю.

Кроме того, эти силы $\boldsymbol{F}_{ik}$ и $\boldsymbol{F}_{ki}$, действуют вдоль одной и той же прямой. Момент таких двух сил, а значит и моменты всех внутренних сил равны нулю.

Для системы материальных точек, в котором $\boldsymbol{L}$ определяется выражением (88), а $\boldsymbol{M}$ — выражением (86) для внешних сил, т.е.

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}_{\text{внешн}}\,. \tag{91}$$

Моментом силы механической системы *относительно оси* называется *проекция* на эту ось вектора момента силы системы относительно любой точки, выбранной на рассматриваемой оси (рисунок 36).

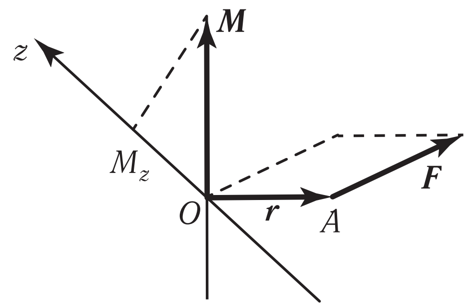


Рис. 36

Соответственно, *моментом импульса относительно оси* называется *проекция* на эту ось вектора *момента импульса* относительно любой точки на данной оси.

Если мы выбираем прямоугольную систему координат с началом, совпадающим с полюсом, то имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= M_{x\,\text{внешн}}\,; \\ \frac{dL_y}{dt} &= M_{y\,\text{внешн}}\,; \\ \frac{dL_z}{dt} &= M_{z\,\text{внешн}}\,. \end{aligned} \tag{92}$$

Если система замкнута (т.е. внешних сил нет), то $\boldsymbol{M}_{\text{внешн}} = 0$ и, согласно уравнению (91) вектор $\boldsymbol{L}$ не изменяется со временем, т.е. $\boldsymbol{L} = \text{const}$.

Отсюда вытекает закон сохранения момента импульса, который гласит, что *момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным*.

5.3. Уравнение движения и равновесия твердого тела

Уравнение движения центра масс C

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{внешн}}\,, \text{ где } \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V}_c\,. \tag{93}$$

Второе — уравнение закон сохранения моментов

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{M}_{\text{внешн}}\,. \tag{94}$$

Если твердое тело покоится, то уравнения (93) и (94) переходят, соответственно, в уравнения:

$$\boldsymbol{F}_{\text{внешн}} = 0\,, \quad \boldsymbol{M}_{\text{внешн}} = 0\,. \tag{95}$$

Это и есть необходимые условия равновесия твердого тела.

5.4. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

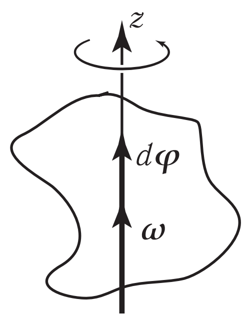


Рис. 37

Мерой перемещения тела за малый промежуток времени dt полагают вектор **dvarphi** элементарного поворота тела (рисунок 37). Определим вектор угловой скорости как:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}\,. \tag{96}$$

5.5. Момент инерции. II-закон Ньютона для вращательного движения

Уравнение динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, имеет вид

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{z\,\text{внешн}}\,, \tag{97}$$

где L_z, $M_{z\,\text{внешн}}$ — проекции моментов импульса $\boldsymbol{M}$ и момента силы $\boldsymbol{F}_{\text{внешн}}$ на ось вращения z.

Определим момент импульса относительно точки O, лежащей на оси OZ, полагая $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{OO}_i + \boldsymbol{r}_{\perp i}$, где O_i — центр окружности, по которой движется i-я материальная точка твердого тела.

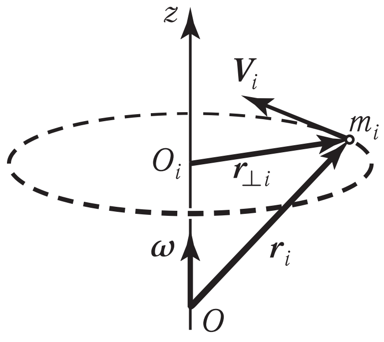


Рис. 38

Тогда

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{V}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{OO}_i \times m_i \boldsymbol{V}_i + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_{\perp i} \times m_i \boldsymbol{V}_i \,.$$

Результирующее произведение в первом слагаемом перпендикулярно оси OZ, и не дает вклада в момент импульса.

Результирующее произведение от второго слагаемого параллельно оси OZ, и с учетом того, что $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, получаем:

$$\boldsymbol{r}_{\perp i} \times (m\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{\perp i}) = m_i r_{\perp i}^2 \boldsymbol{\omega}$$

Таким образом

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} r_{\perp i}^2 \omega$$

или

$$L_z = J_z \omega \,, \tag{98}$$

где величина

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} r_{\perp i}^2 \,, \tag{99}$$

называется моментом инерции тела относительно оси OZ.

Тогда *уравнение динамики тела, вращающегося относительно неподвижной оси OZ* (II закон Ньютона для вращательного движения), можно записать в виде

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_{z\,\text{внешн}}$$

или

$$J_z \beta = M_{z\,\text{внешн}} \,. \tag{100}$$

5.6. Момент инерции тел правильной геометрической формы

В механике твердое тело рассматривают как механическую систему, масса m которой непрерывно распределена по объему V тела.

При вычислении момента инерции тела, суммирование

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} r_{\perp i}^2$$

переходит в интегрирование

$$J_z = \int_m r_\perp^2 dm = \int_V r_\perp^2 \rho dV, \tag{101}$$

где ρ — плотность тела, dm — масса малого элемента объема dV, отстоящего от оси вращения тела на расстояние $r_\perp$.

Рассчитаем момент инерции однородного цилиндра, вращающегося вокруг оси OO'.

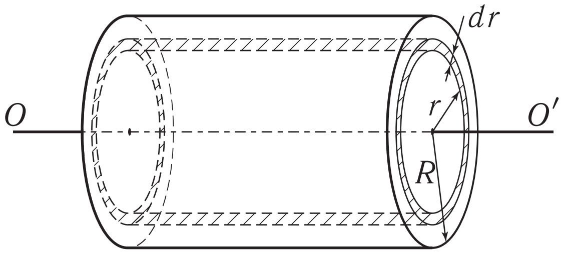


Рис. 39

Разделим цилиндр высоты h и радиуса R на концентрические слои толщиной dr. Если плотность ρ, то масса dm в слое толщиной dr будет равна:

$$dm = \rho dV = \rho h dS;$$

т.к. $S = \pi r^2$, $dS = 2\pi r dr$ то $dm = 2\pi\rho h r dr$.

И тогда

$$J_z = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\rho h R^4}{2} = \frac{mR^2}{2},$$

где m — масса цилиндра.

5.7. Теорема Штейнера

$$J_z = J_C + md^2, \tag{102}$$

где J_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной оси Z; d — расстояние между осями.

5.8. Свободные оси, главные оси инерции

Закон сохранения моментов импульса $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}_{\text{внешн}}$ работает лишь при определенных условиях, а именно при вращении тела вокруг одной из свободных осей вращения.

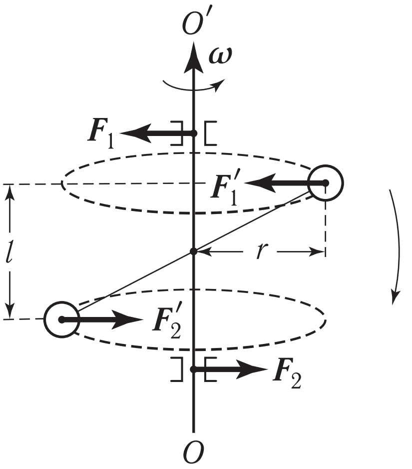


Рис. 40

Рассмотрим пример вращения тела представленного на рисунке 40. Возникает момент силы, величину которого можно определить как:

$$M = F_1\frac{l}{2} + F_2\frac{l}{2} = \frac{2(\omega^2 rm)l}{2} = \omega^2 rml.$$

Ось вращения, положение которой в пространстве *не меняется* при вращении тела вокруг нее в отсутствии внешних сил, *называется свободной осью вращения тела*.

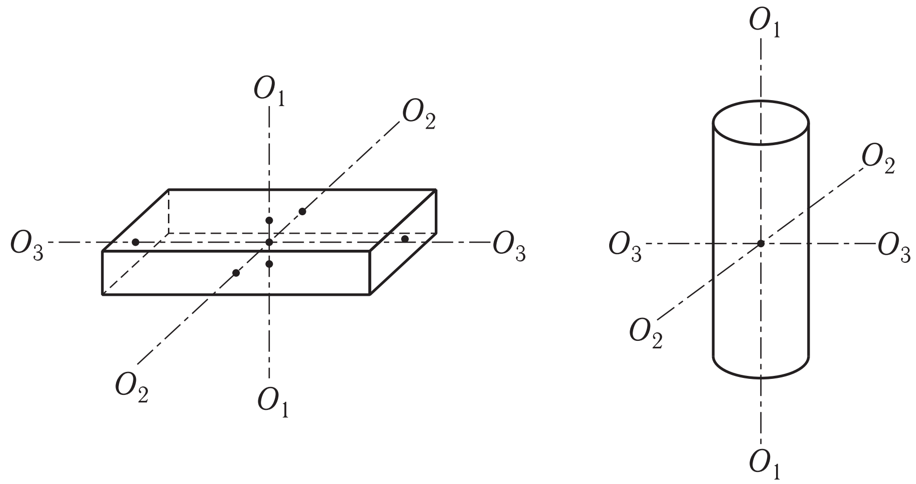


Рис. 41

Для тела любой формы всегда есть три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр масс тела оси, которые могут служить *свободными осями* (см. приведенные примеры на рисунке 41) или *главными осями инерции*.

Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*.

5.9. Работа и мощность при вращательном движении

При повороте тела на угол $d\boldsymbol{\varphi}$ вокруг оси z совершается работа

$$dA = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = F_z\left|d\boldsymbol{r}\right| = F_z r_\perp d\varphi = M_z d\varphi = \boldsymbol{M}d\boldsymbol{\varphi}\,. \tag{103}$$

Мощность определяется как:

$$P = \frac{dA}{dt} = M_z\frac{d\varphi}{dt} = M_z\omega = \boldsymbol{M\omega}\,. \tag{104}$$

5.10. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Рассчитаем кинетическую энергию вращающегося твердого тела.

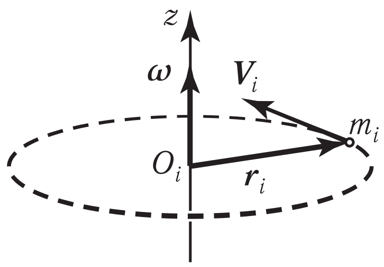


Рис. 42

Кинетическая энергия выделенного i–го элемента твердого тела, массой m_i, движущегося со скоростью V_i будет равна:

$$\Delta W_{ki} = \frac{m_i V_i^2}{2}\,.$$

С учетом того, что

$$V_i = r_i\omega_i = r_i\omega\,,$$

получим

$$\Delta W_{ki} = \frac{m_i(r_i\omega)^2}{2}\,.$$

Суммируя по всему объему, получаем

$$W_k = \sum \Delta W_{ki} = \sum \frac{m_i(r_i\omega)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum m_i r_i^2\,, \tag{105}$$

или

$$W_k = \frac{J_z\omega^2}{2}\,, \tag{106}$$

где $J_z = \sum m_i r_i^2$, момент инерции тела, вращающегося вокруг оси z.

5.11. Гироскоп

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{внешн}}$$

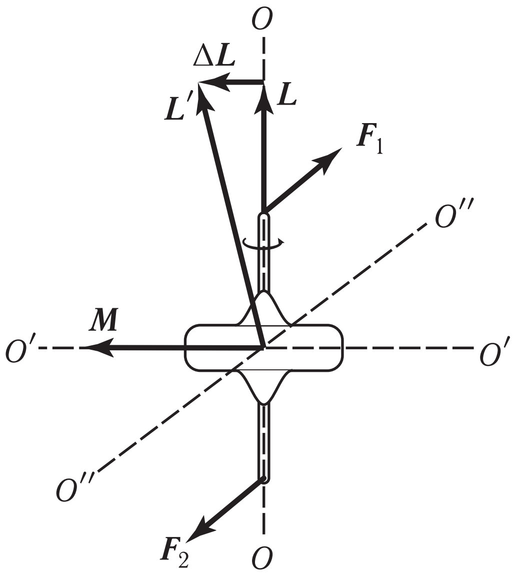


Рис. 43

5.12. Основные величины и уравнения поступательного и вращательного движений

Поступательное движение		Вращательное движение	
масса	m	момент инерции	J
путь	S	угол поворота	φ
скорость	$V = dS/dt$	угловая скорость	$\omega = d\varphi/dt$
касательное ускорение	$a = dV/dt = d^2S/dt^2$	угловое ускорение	$\beta = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$
сила	$\boldsymbol{F}$	момент силы	$\boldsymbol{M}$
уравнение движения	$d\boldsymbol{p}/dt = \boldsymbol{F}$	уравнение движения	$d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{M}$
	$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$		$J_z\beta = M_z$
кинетическая энергия	$W_k = mV^2/2$	кинетическая энергия	$W_k = J_z\omega^2/2$
элементарная работа	$dA = \boldsymbol{F}s\boldsymbol{r} = F_\tau dS$	элементарная работа	$dA = M_z d\varphi$
мощность	$P = \boldsymbol{FV} = F_\tau V$	мощность	$P = \boldsymbol{M\omega} = M_z\omega$

6. Упругие свойства твердых тел

6.1. Деформация твердого тела

Изменение положения точек тела, изменение размеров и формы тела под любым механическим воздействием называется *деформацией*. Если по окончании воздействия тело принимает первоначальные размеры и форму — *упругая деформация*.

Виды деформации: *растяжение, сдвиг, сжатие, изгиб, кручение*.

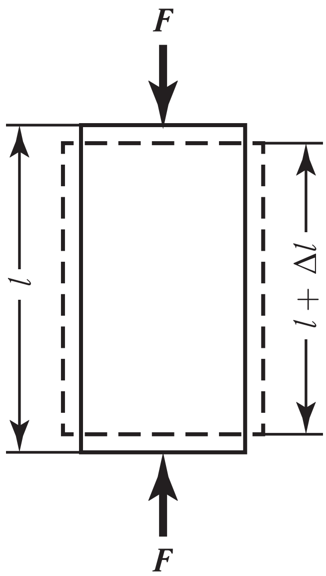


Рис. 44

6.2. Закон Гука. Диаграмма деформации

Относительное удлинение —	$\varepsilon = \Delta l/l$.
Экспериментально показано, что	$\varepsilon = \alpha(F/S)$.
Коэффициент упругости —	α,
модуль Юнга —	$E = 1/\alpha$;
Физический смысл модуля Юнга	$(\varepsilon = 1)$:
	$1 = (F/S)(1/\mathrm{E})$ или $\mathrm{E} = (F/S)$.
Коэффициент Пуассона —	$\mu = -\varepsilon'/\varepsilon$;
Напряжение —	$\sigma = (F/S)$; $\varepsilon = \alpha\sigma$

Откуда

$$F = S\varepsilon/\alpha = (ES/l)\,\Delta l = k\,\Delta l.$$

Для малых деформаций справедливо (закон Гука):

$$F = kx = (ES/l)x\,, \tag{107}$$

где k – коэффициент пропорциональности.
ОП — область *линейной деформации*, область в которой работает закон Гука; ОУ — область *упругой деформации*; УТ — область *пластической деформации*; ТР — область *текучести* — при неизменности напряжения деформация меняется со временем. Относительная длина УР – позволяет определить — *пластичные* или *хрупкие* материалы.

6.3. Энергия упругой деформации

$$F = -kx$$

$$A = \int_x^0 F dx = -k\int_x^0 dx =$$

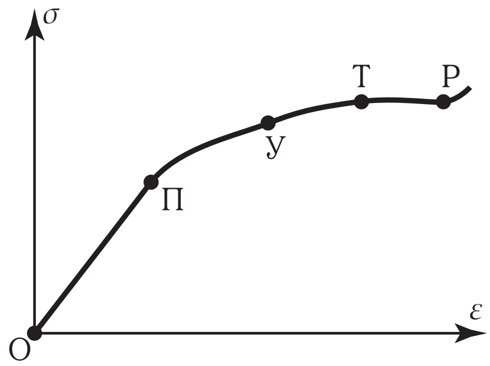


Рис. 45

Поскольку А $= W_п$, то отсюда:

$$W_п = \frac{kx^2}{2}. \qquad (108)$$

Заменим k на (ES/l), с учетом того, что $\varepsilon = \Delta l/l$, мы получим

$$W_п = (ES/l)(\Delta l)^2 = (EV\varepsilon^2)/2$$

или

$$W_п/V = (E\varepsilon^2)/2.$$

7. Колебания

В природе и технике происходят *процессы, повторяющиеся во времени*. Такие процессы называются колебаниями.

Качания маятника, переменный электрический ток, свет, звук, и т.д. являются примерами колебаний различных физических величин. Оказывается, что количественные закономерности (т.е. математические выражения) этих процессов имеют много общего.

Различают *свободные, вынужденные, автоколебания* и *параметрические* колебания.

7.1. Свободные гармонические колебания

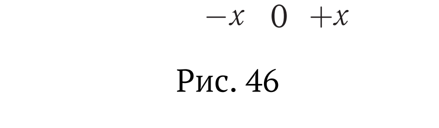


Рис. 46

Простейшая колебательная система — тело массы m, скользящее без трения по горизонтальному столу (рисунок 46).

Отклонение — x; пружина действует с силой F, пропорциональной смещению x и направленной в сторону обратную смещению, т. е.

$$F = -kx,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Знак «*минус*» означает, что сила упругости противодействует смещению.

Механическая система, совершающая колебания около положения равновесия, называется *классическим осциллятором*.

Периодическое колебание, при котором смещение изменяется со временем по закону cos или sin называется *гармоническим колебанием*.

Время, по истечению которого движение повторится, называется периодом колебания. Он обозначается как T, $[T] = \text{с}$.

Частота колебаний равна числу полных колебаний за 1 с: $\nu = 1/T$. Частота измеряется в Гц (1 Гц — это одно колебание за 1 с).

Выведем *уравнение колебаний гармонического осциллятора.*

Запишем 2-й закон Ньютона:

$$F = ma \tag{109}$$

где $F = -kx$, а ускорение $a = dV/dt = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$.

В итоге получаем

$$m(d^2x/dt^2) = -kx \tag{110}$$

или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{111}$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \tag{112}$$

Уравнение (111) является обыкновенным *линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка* с постоянными коэффициентами.

Его решением будет:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{113}$$

где A — амплитуда колебаний, т. е. *наибольшее отклонение колеблющегося тела от положения равновесия*.

Выражение $\omega_0 t + \theta$ в скобках (113) называют *фазой* колебания. Она определяет смещение в данный момент времени t; θ — начальная фаза. Она характеризует смещение в момент времени $t = 0$ и определяется начальными условиями, как и амплитуда A.

Решение (113) проверим подстановкой, для этого подставим его в уравнение (111):

$$\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \theta) - A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \theta) = 0$$

Значения как cos так и sin через 2π радиан повторяются, то можно найти связь между периодом T и ω_0

$$\omega_0(t + T) + \theta = \omega_0 t + \theta + 2\pi$$

откуда

$$\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu \tag{114}$$

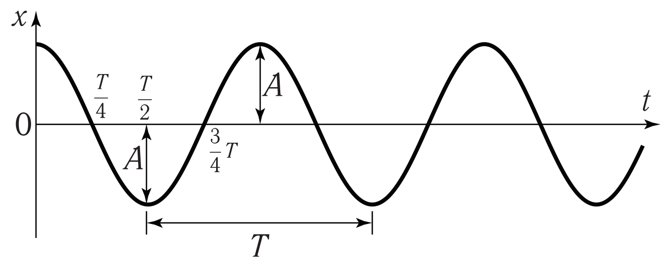


Рис. 47

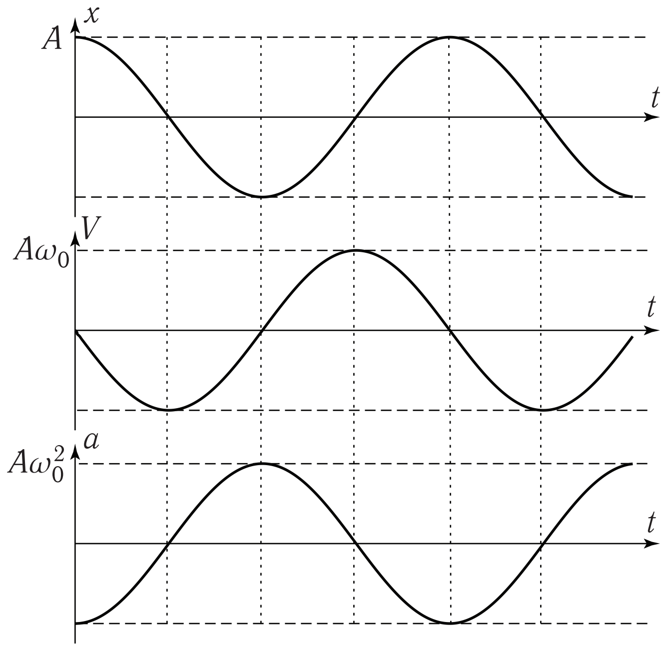


Рис. 48

ω_0 — называется собственной круговой частотой. Она равна числу полных колебаний за 2π секунд.

Из (112) и (114) следует, что период колебания

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$$

не зависит от амплитуды колебаний A.

7.2. Скорость и ускорение при гармоническом колебании

Пусть $\theta = 0$, тогда зависимость смещения от времени может быть представлена как:

$$x = A\cos(\omega_0 t) = A\cos\frac{2\pi}{T}t \tag{115}$$

Графически эту зависимость можно представить так, как это показано на рисунке 48 (верхняя часть).

Зависимость скорости от времени выглядит как:

$$V = dx/dt = \dot{x} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) = -A\omega_0\sin\frac{2\pi}{T}t \tag{116}$$

Значения скорости отличается по фазе от значений смещения на $\pi/2$ (рисунок 48). Максимальное значение скорости будет равно $V_м = A\omega_0$.

Ускорение определяется соотношением:

$$a = dV/dt = d^2x/dt^2 = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos\omega_0 t = -A\omega_0^2 \cos\frac{2\pi}{T}t \tag{117}$$

и пропорционально A и ω_0, а по направлению совпадает с направлением силы $\boldsymbol{F}$.

По фазе ускорение отличается от скорости на $\pi/2$, а от смещения — на π. Максимальное ускорение равно $a_м = A\omega_0^2$.

7.3. Энергия гармонического колебания

Известно, что потенциальная энергия упруго деформированного тела равна

$$W_п = kx^2/2$$

где k — коэффициент упругости, x — смещение; откуда для потенциальной энергии колебаний находим

$$W_п = (kA^2/2)\cos^2(\omega_0 t + \theta) \tag{118}$$

Кинетическая энергия

$$W_к = mV^2/2$$

в нашем случае будет

$$W_к = (m\omega_0^2 A^2/2)\sin^2(\omega_0 t + \theta) = (kA^2/2)\sin^2(\omega_0 t + \theta) \tag{119}$$

Анализ (118) и (119) показывает, что когда одна из энергий $W_п$ или $W_к$ увеличивается, то другая уменьшается.

Полная же энергия равна

$$E = W_п + W_к = kA^2/2 \tag{120}$$

7.4. Векторная диаграмма гармонического колебания

Гармоническое колебание $x = A\cos(\omega_0 t + \theta)$ можно представить в виде проекции вектора $\boldsymbol{A}$, вращающегося против хода часовой стрелки с угловой скоростью, равной круговой частоте ω_0.

Проекция вектора $\boldsymbol{A}$ на направление OX будет определяться как (рисунок 49):

$$x = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$

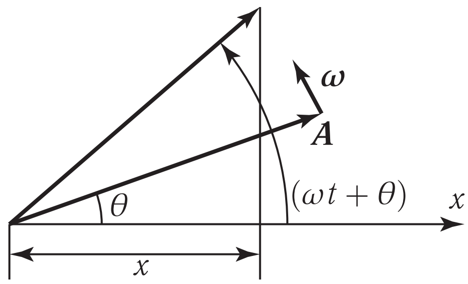


Рис. 49

7.5. Сложение одинаково направленных колебаний

Сложим два гармонических колебаний одинаковой частоты:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1)$$
$$x_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \alpha_2)$$

Используем векторную диаграмму; откуда следует, что

$$x = x_1 + x_2 = a \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

где

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] \tag{121}$$

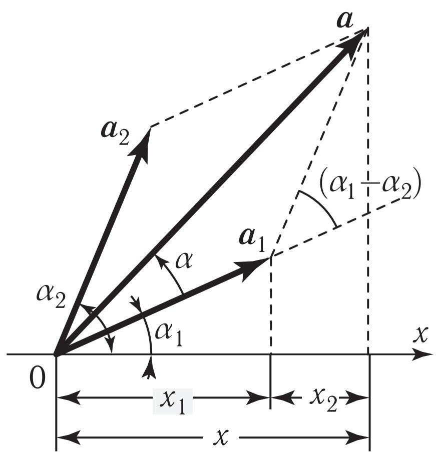


Рис. 50

$$\operatorname{tg} \alpha = [a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2][a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2] \tag{122}$$

7.6. Амплитуда и начальная фаза колебаний

Зная параметры, характеризующие гармонические колебания, можно определить амплитуду (A) и начальную фазу колебаний (θ).

Итак мы знаем величину смещения и скорость

$$x = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$
$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta)$$

тогда в момент времени $t = 0$

$$x = A\cos\theta, \quad v = -A\omega_0 \sin\theta$$

или

$$x = A\cos\theta, \quad v/omega_0 = -A\sin\theta$$

Возведем в квадрат эти соотношения и сложим их

$$x^2 + [v/\omega_0]^2 = A^2$$

откуда

$$A = \sqrt{x^2 + [v/\omega_0]^2} \tag{123}$$

Начальную фазу колебаний (θ) определим следующим образом:

$$\operatorname{tg}\theta = \sin\theta/\cos\theta = -[v/\omega_0]/x \tag{124}$$

7.7. Гармонический осциллятор

Система, описываемая уравнением

$$d^2x/dt^2 + \omega_0 x = 0$$

где $\omega_0^2 = k/m$, решение которого определяется как:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \theta)$$

называют гармоническим осциллятором.

Найдем импульс гармонического осциллятора

$$p = m\,dx/dt = -mA\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta).$$

Или

$$x/A = \cos(\omega_0 t + \theta)\ , \quad p/(mA\omega_0) = -\sin(\omega_0 t + \theta).$$

Возведем в квадрат эти два уравнения и сложим —

$$(x/A)^2 + [p/(mA\omega_0)]^2 = 1 \tag{125}$$

В результате получаем уравнение эллипса:

$$(x^2/A^2) + (y^2/B^2) = 1,$$

где по оси x отложено смещение, а по оси y — импульс p. Абсолютными максимальными значениями (полуосями) для x будут $\pm A$, для y — $\pm m\mathrm{A}\omega_0$.

Координатная плоскость p–x — фазовая плоскость, а соответствующий график — фазовая траектория (эллипс, рисунок 51).

Найдем площадь эллипса

$$S = \pi A m \mathrm{A}\omega_0 = (2\pi/\omega_0)(m\mathrm{A}^2\omega_0^2/2)$$
$$(2\pi/\omega_0) = 1/\nu_0, \quad (\nu_0 \text{ — собственная частота осциллятора})$$
$$(m\mathrm{A}^2\omega_0^2/2) = E, \quad (E \text{ — полная механическая энергия})$$
$$S = (1/\nu_0)\mathrm{E} \quad \text{или} \quad E = \nu_0 S. \tag{126}$$

Откуда следует, что энергия пропорциональна площади эллипса и собственной частоте.

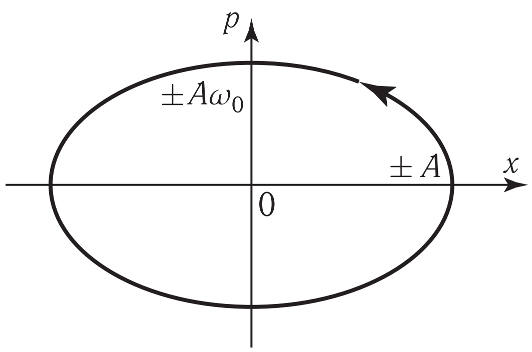


Рис. 51

7.8. Биения

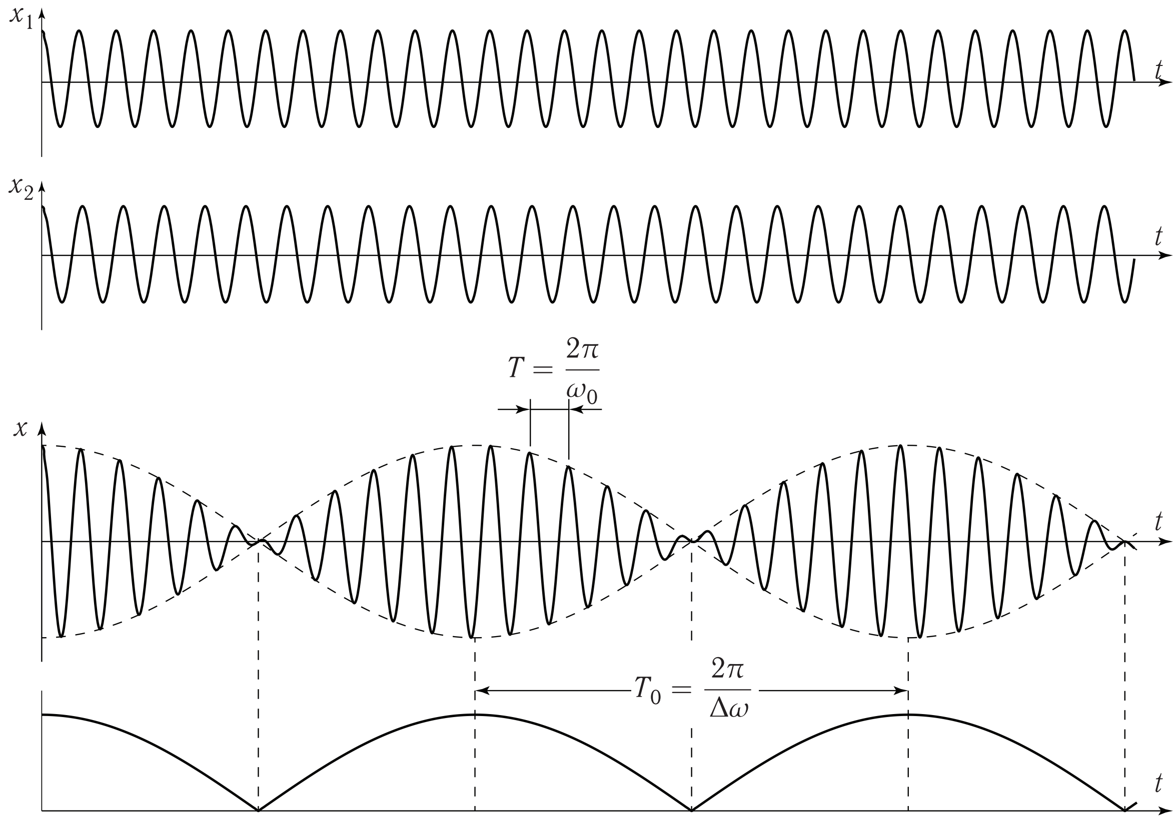


Рис. 52

Имеются два гармонических колебания, близкие по частоте $\omega 1 \sim \omega_2$

$$x_1 = A\cos\omega_1 t, \quad x_2 = A\cos\omega_2 t$$

тогда

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\frac{\omega 1 - \omega_2}{2}t\cos\frac{\omega 1 + \omega_2}{2}t \tag{127}$$

то результирующее колебание:

$$x = 2A\cos\Delta\omega t\cos\omega_0 t$$

— есть гармоническое колебание с частотой ω_0, где $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$, а $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$, и с изменяющейся амплитудой $2A\cos\Delta\omega t$ (рисунок 52).

7.9. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим простейшие примеры сложения взаимно перпендикулярных колебаний. Пусть

$$x = A\cos\omega t$$

и

$$y = B\cos\omega t$$

поделим одно выражение на другое

$$(\mathrm{y} = \mathrm{B}\cos\omega t)/(x = \mathrm{A}\cos\omega t),$$

откуда в результате – получаем уравнение прямой

$$y = (B/A)x$$

(рисунок 53).

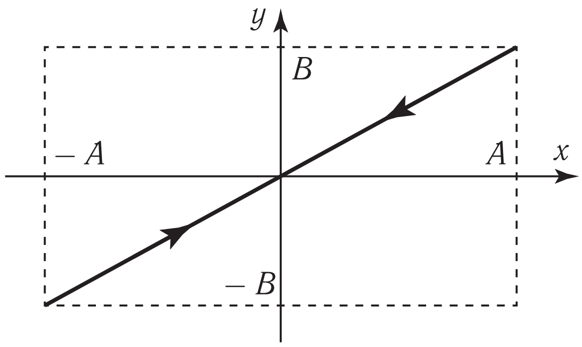


Рис. 53

В случае

$$x = A\cos\omega t$$

и

$$y = B\sin\omega t$$

возведем в квадрат эти соотношения:

$$(x/A)^2 = \cos^2\omega t$$

и

$$(y/B)^2 = \sin^2\omega t$$

и сложим получившиеся выражения. В результате получим уравнение эллипса:

$$(x^2/A^2) + (y^2/B^2) = 1$$

(рисунок 54).

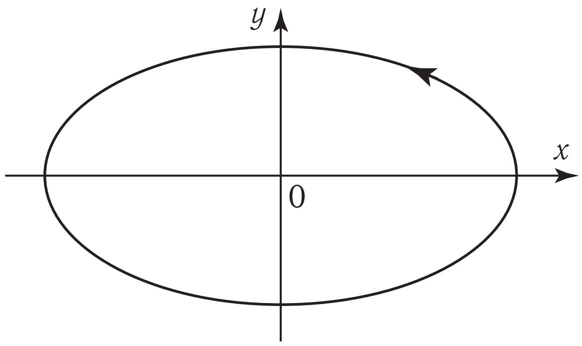


Рис. 54

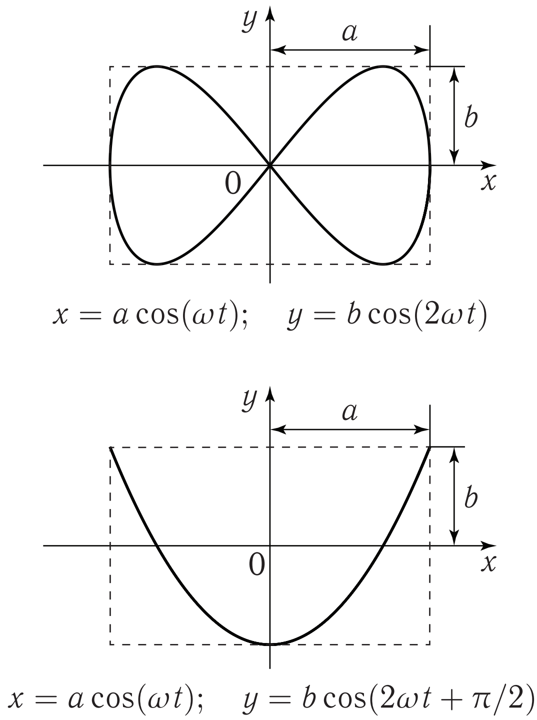


Рис. 55

7.10. Фигуры Лиссажу

Замкнутые траектории — фигуры Лиссажу.

7.11. Математический маятник

Математический маятник — это материальная точка, массой m подвешенная на невесомой, нерастяжимой нити.

Тангенциальное ускорение a, возникает под действием тангенциальной силы

$$F_\tau = -mg\sin\varphi$$

Для малых φ можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$ и тогда $F_\tau \approx -mg\varphi$.

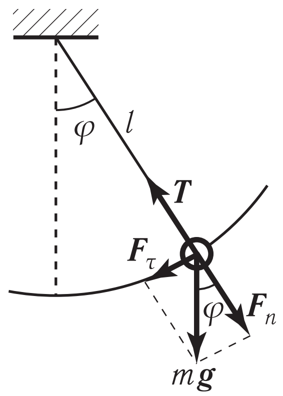


Рис. 56

С другой стороны тангенциальное ускорение связано с угловым ускорением

$$\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$$

соотношением:

$$a_\tau = \varepsilon l = l(d^2\varphi/dt^2) = l\ddot{\varphi}$$

Из второго закона Ньютона следует, что

$$ma_\tau = F_\tau \qquad (128)$$

или

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi$$

Деля правую и левую части этого уравнения на l, получим:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \qquad (129)$$

где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

Решением его для малых φ будет:

$$\varphi = \varphi_м \cos(\omega_0 t + \theta) = \varphi_м \cos[(2\pi/T)t + \theta] \qquad (130)$$

где

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g} \qquad (131)$$

Таким образом, период колебаний математического маятника T, не зависит от его массы и амплитуды колебаний.

7.12. Физический маятник

Это твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести.

Рассмотрим эту задачу исходя из II-го закона Ньютона для вращательного движения

$$M = J\varepsilon = Jd^2\varphi/dt^2$$

На маятник, отклоненный на малый угол φ действует момент силы

$$M = -mgl\sin\varphi \approx -mgl\varphi$$

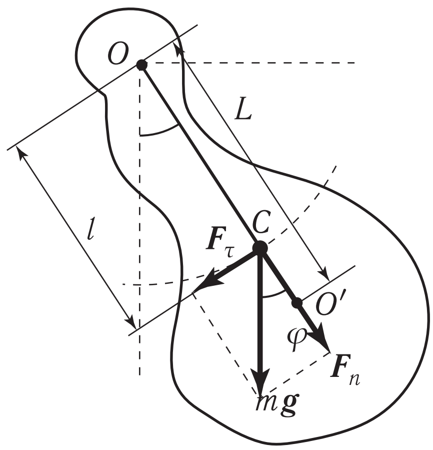


Рис. 57

который сообщает угловое ускорение

$$\varepsilon = d^2\varphi/dt^2 = MJ$$

где J — момент инерции тела, относительно оси, проходящей через точку O.

С учетом этого получается дифференциальное уравнение

$$Jd^2/dt^2 = -mgl\varphi$$

Разделив правую и левую части уравнения на момент инерции тела J, получим:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \qquad (132)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{mgl/J}$$

Решением уравнения (132) будет

$$\varphi = \varphi_{\text{м}} \cos(\omega_0 t + \theta) \qquad (133)$$

Период колебания

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{J/mgl} = 2\pi\sqrt{L/g} \qquad (134)$$

где $L = J/ml$ — *приведенная длина физического маятника*;

L — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебания физического маятника.

7.13. Свободные затухающие колебания

Кроме силы упругости $F = -kx$ на колеблющееся тело действуют также сила сопротивления, которая при медленных движениях пропорциональна скорости, т. е.

$$F_{\text{сопр}} = -rV = -r(dx/dt)$$

где r — коэффициент сопротивления, с размерностью $[r]$ = кг/с.

С учетом сказанного, уравнение движения тела будет иметь вид

$$m(d^2x/dt^2) = -kx - r(dx/dt)$$

или, разделив на массу правую и левую части уравнения, имеем:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (135)$$

где $\beta = r/2m$ — коэффициент затухания; $[\beta] = 1/\text{с} = \text{с}^{-1}$, $\omega_0^2 = k/m$ — собственная частота колебания системы ($r = 0$).

При решение будем искать в виде

$$x = A(t)\cos(\omega t + \theta) \qquad (136)$$

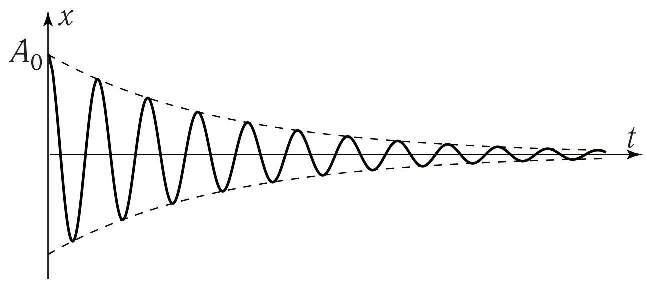


Рис. 58

Продифференцировав x по t (136) найдем:

$$dx/dt = dA/dt\cos(\omega t + \theta) - A\omega\sin(\omega t + \theta)$$
$$d^2x/dt^2 = d^2A/dt^2\cos(\omega t + \theta) - 2dA/dt\omega\sin(\omega t + \theta) - A\omega^2\cos(\omega t + \theta)$$

Подставим все это в уравнение (135) и, преобразовав, получим

$$[d^2\text{A}/dt^2 + 2\beta d\text{A}/dt + (\omega_0^2 - \omega^2)\text{A}]\cos(\omega t + \theta) - 2\omega[d\text{A}/dt + \beta\text{A}]\sin(\omega t + \theta) = 0$$

Это выражение равно нулю при любых значениях t если равны нулю коэффициенты при cos и sin.

$$[d^2\text{A}/dt^2 + 2\beta d\text{A}/dt + (\omega_0^2 - \omega^2)\text{A}] = 0 \qquad (137)$$

$$[d\text{A}/dt + \beta\text{A}] = 0 \qquad (138)$$

Уравнение (138) можно преобразовать к виду:

$$dA/A = \beta A$$

интегрирование которого дает

$$\ln A = -\beta t + \ln A_0$$

где $\ln A_0$ — постоянная интегрирования.

Потенцированием получим

$$A(t) = A_0\exp(-\beta t)$$

Легко видеть, что

$$dA/dt = \beta A$$

а

$$d^2A/dt^2 = \beta^2 A$$

Подстановка этих значений в (137) приводит к соотношению

$$\beta^2 A - 2\beta^2 A + (\omega_0^2 - \omega^2)A = 0$$

откуда легко получить

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

и

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

В результате получим решение уравнения (135) в виде

$$x = A_0 \exp(-\beta t)\cos(\omega t + \theta) \tag{139}$$

7.14. Логарифмический декремент затухания

Натуральный логарифм отношения отклонения системы в моменты времени t и $t + T$ называется логарифмическим декрементом затухания:

$$\delta = \ln[x(t)/x(t+T)] = \ln[A_0 e^{-\beta t}/A_0 e^{-\beta(t+T)}] = \beta T = 2\pi\beta/\omega$$

Величина, обратная δ, показывает число колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e = 2{,}7182\ldots$ раз.

Величина

$$Q = \pi/\delta = \pi\omega/2\pi\beta = \omega/2\beta$$

называется добротностью колебательной системы.

7.15. Вынужденные колебания

Они возникают при действии на систему внешней периодически изменяющейся силы (*вынуждающей силы*)

$$F = F_м \cos\Omega t$$

где Ω — круговая частота вынуждающей силы.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний с учетом затухания запишется в виде:

$$m(d^2x/dt^2) = -kx - r(dx/dt) + F_м \cos\Omega t$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_м/m)\cos\Omega t \tag{140}$$

Таким образом, получили *линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка* с постоянными коэффициентами.

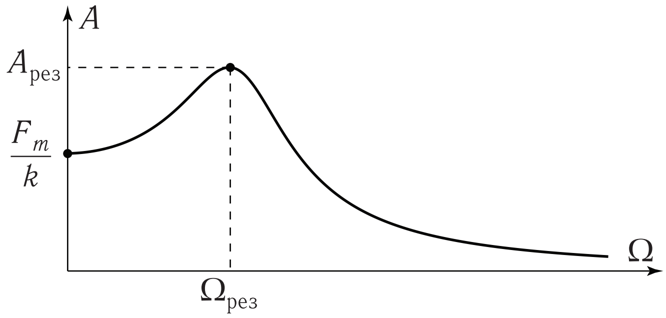


Рис. 59

Решением такого уравнения будет

$$x = x_0 + x_{вын}$$

где x_0 — общее решение однородного уравнения.

Согласно ранее определенному:

$$x_0 = A_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \theta)$$

и с течением времени $x_0 \to 0$.

Поэтому $x \to x_{вын}$.

Из решения (?32?) следует, что

$$x_{вын} = A \cos(\Omega t - \theta)$$

где

$$A = F_м / m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 - 4\beta^2\Omega^2} \tag{141}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}[2\beta\Omega/(\omega_0^2 - \Omega^2)] \tag{142}$$

Из анализа (141) следует, что хотя амплитуда вынуждающей силы $F_м$ остается постоянной амплитуда F вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы.

Исследуя (141) на экстремум, можно показать, что только при резонансной частоте

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \tag{143}$$

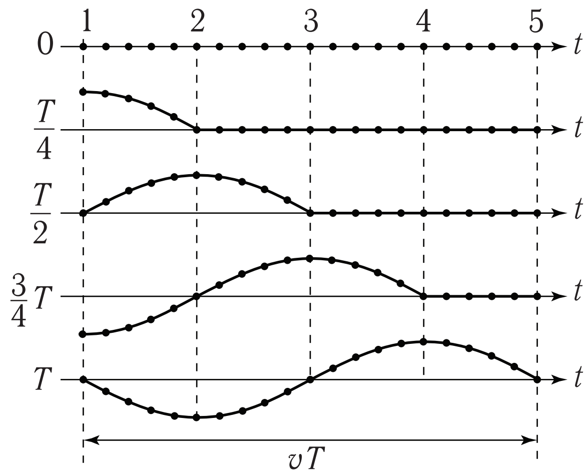
амплитуда вынужденных колебаний достигает максимальной величины:

$$A_{рез} = F_м / 2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{144}$$

Это явление называется *резонансом* (рисунок 59).

На рисунке 59 приведена зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от частоты Ω вынуждающей силы; откуда при $\Omega = 0$ находим

$$A = F_м / m\omega_0^2 = F_м / k$$



8. Волны

8.1. Упругие среды. Продольные и поперечные волны

Если в каком-либо месте упругой среды возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами эти колебания будут распространяться в среде с некоторой скоростью $\boldsymbol{v}$. Процесс распространения колебаний в среде *называется волной*.

Механические возмущения (деформации), распространяющиеся в упругой среде, называются *упругими или механическими волнами*.

Упругие волны бывают *продольные и поперечные*. В *продольных* волнах частицы среды колеблются в направлении распространения волны. В *поперечных* волнах частицы среды колеблются в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Продольные волны могут возбуждаться в твердых, жидких и газообразных средах.

Поперечные волны могут возникать только в твердых телах.

Отметим, что распространение упругих волн не связано с переносом вещества. Бегущие волны переносят энергию колебательного движения в направлении распространения волны.

8.2. Уравнение гармонической бегущей волны

Упругая волна называется гармонической, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

Расстояние между ближайшими частицами на оси OX колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны λ.

Длина волны равна расстоянию, на которое распространится волна за время, равное периоду колебаний T.

$$\lambda = vT \tag{145}$$

Частота $\nu = 1/T$, тогда

$$\lambda = v/\nu. \tag{146}$$

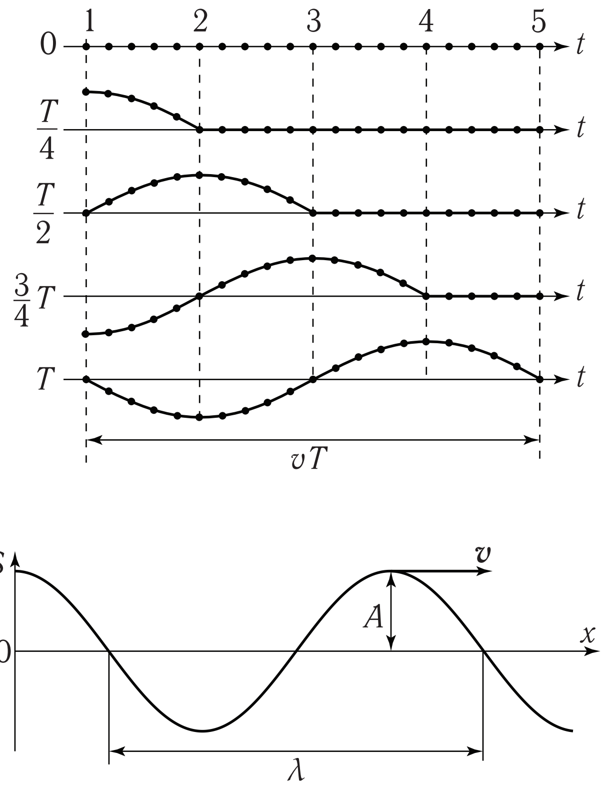


Рис. 60. Гармоническая поперечная волна, распространяющаяся со скоростью ***v*** вдоль оси *x* для фиксированного момента времени *t*.

Уравнение такой волны, исходя из рисунка 60, имеет вид ($\varphi_0 = 0$)

$$S = A\cos\omega[t - x/v] \tag{147}$$

или

$$S = A\cos[\omega t - (\omega/v)x] = A\cos[\omega t - (2\pi/\lambda)x] \tag{148}$$

Для характеристики волн используется волновое число

$$k = \omega/v = 2\pi/\lambda \tag{149}$$

где $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ — циклическая, (круговая) частота.

С учетом (149) получим уравнение бегущей плоской гармонической волны в общем случае

$$S = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \tag{150}$$

где A — амплитуда, $\Phi = \omega t - k\mathrm{x} + \varphi_0$ — фаза волны, φ_0 ’— начальная фаза.

8.3. Фронт волны, волновые поверхности, фазовая скорость

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени $t4$, называется волновым фронтом, а место точек, колеблющихся в одинаковой фазе — волновой поверхностью.

Бегущая волна (150) является плоской волной, т.к. ее волновые поверхности

$$\Phi = \omega t - k\mathrm{x} + \varphi_0 = \mathrm{const}$$

представляют собой совокупности плоскостей, параллельных друг другу.

Уравнение гармонической сферической волны имеет вид

$$S = A(r)\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \tag{151}$$

где r — радиальная координата.

В непоглощающей среде $A(r) \sim 1/r$.

Скорость v распространения гармонической волны называется фазовой скоростью. В случае плоской гармонической волны из условия

$$\omega t - k\mathrm{x} + \varphi_0 = \mathrm{const}$$

следует, что

$$dx/dt = \omega/k = v. \tag{152}$$

8.4. Волновое уравнение

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается *волновым уравнением* — дифференциальным уравнением в частных производных.

$$\Delta S = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \tag{153}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{154}$$

— оператор Лапласа, v — фазовая скорость.

Решением уравнения (153) является уравнение любой волны (плоской, сферической и т.д.). Для плоской гармонической волны (150) волновое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \tag{155}$$

8.5. Энергия бегущей волны. Плотность потока энергии

Упругая среда, в которой распространяется волна, обладает как *кинетической энергией* колебательного движения частиц, так и *потенциальной энергией*, обусловленной деформацией среды.

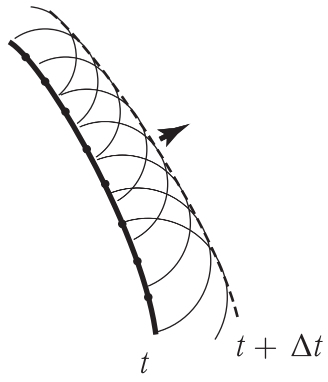
Объемная плотность энергии для плоской бегущей волны (150)

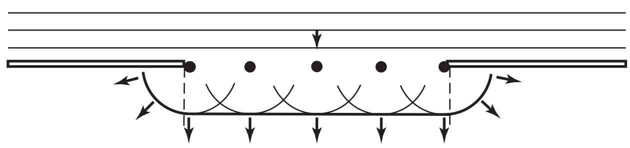
$$w = \frac{dW_k + dWp}{dV} = \frac{dW}{dV} = \rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t - kx + \varphi_0) \tag{156}$$

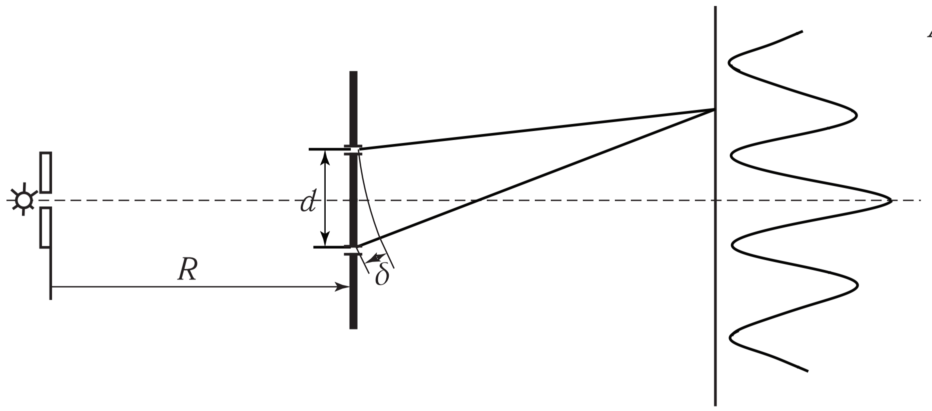
где $\rho = dm/dV$ — плотность среды, т.е. периодически изменяется от 0 до $\rho A^2\omega^2$ за время $\pi/\omega = T/2$.

Среднее значение плотности энергии за промежуток времени $\pi/\omega = \mathrm{T}/2$

$$\langle w\rangle = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} w dt = \frac{1}{2} = \rho A^2\omega^2 \tag{157}$$







8.6. Дифракция и интерференция волн

Гармонические волны *распространяются в среде независимо друг от друга*. Это справедливо для волн любой природы и носит название *принципа суперпозиции*.

Монохроматическая волна — *это строго гармоническая (синусоидальная) волна с постоянными во времени частотой, амплитудой и начальной фазой*.

Амплитуда и фаза такой волны могут изменяться от одной точки пространства к другой, частота же остается постоянной во всем пространстве.

Когерентные волны — *это гармонические волны с с одинаковой частотой, одинакового направления и с постоянной разностью фаз*.

Волны, встретив на своем пути препятствие, огибают его. Это явление называется *дифракцией*.

Согласно принципу Гюйгенса каждая точка, до которой доходит волновое движение, служит центром вторичных волн; огибающая этих волн — результат *интерференции* вторичных волн.

При сложении когерентных волн возникает явление интерференции — *колебания в некоторых точках усиливаются, а в других — ослабляются*.

Рассмотрим это на примере сложения двух когерентных волн (рисунок ??)

$$S_1 = A\cos(\omega t) \quad \text{и} \quad S_2 = A\cos(\omega t)$$

До экрана в точку дойдут колебания от соответствующих источников

$$S_1 = A\cos(\omega t - kr_1) \quad \text{и} \quad S_2 = A\cos(\omega t - kr_2)$$

или

$$S_1 = A\cos 2\pi(\omega t - r_1/\lambda) \quad \text{и} \quad S_2 = A\cos 2\pi(\omega t - r_2/\lambda). \tag{158}$$

Амплитуда колебаний в искомой точке будет

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi) \tag{159}$$

где

$$\Delta\varphi = 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda$$

Максимум амплитуды: $\Delta\varphi = 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda = 2n\pi$; или $(r_2 - r_1) = n\lambda$, где $n = 0, 1, 2 \ldots$

Минимум амплитуды: $\Delta\varphi = 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda = (2n+1)\pi$; или $(r_2 - r_1) = (n+1/2)\lambda$, где $n = 0, 1, 2 \ldots$

8.7. Стоячие волны

Если навстречу друг другу распространяются две волны

$$S_1 = A\cos(\omega t - kx) \quad \text{и} \quad S_2 = A\cos(\omega t + kx)$$

то образуется стоячая волна

$$S = S_1 + S_2 = 2A\cos kx \cos\omega t \tag{160}$$

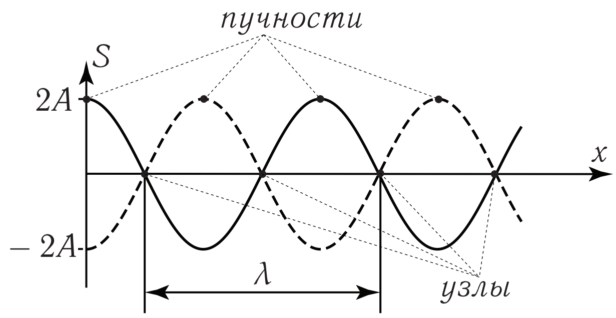


Рис. 61

Исследуем сначала множитель $\cos kx = \cos 2\pi x/\lambda$.

В точках $x = \pm(1 + 2n)\lambda/4$, где $n = 0, 1, 2 \ldots$, $\cos kx = 0$ и, следовательно, $S = 0$. Эти точки не колеблются и поэтому называются *узлами* стоячей волны (см. рисунок 61). Расстояние между соседними узлами равно $\lambda/2$.

Точки максимальной амплитуды стоячей волны называются *пучностями*. Их координаты $x = \pm n\lambda/2$. Расстояние между соседними пучностями равно $\lambda/2$.

На рисунке 61 сплошной линией изображена зависимость $S = 2A\cos kx\cos\omega t$ от x, соответствующая моменту времени t (например, $t = 0$), при котором $\cos\omega t = \cos 2\pi t/T = 1$.

Через четверть периода $\cos 2\pi t/4T = 0$ и $S = 0$.

Еще через время, равное $T/2$, $\cos 2\pi t/2T = -1$.

Спустя $t = 3T/4$ $S = 0$ и через $t = T$ все повторится.

9. Механика жидкостей и газов

9.1. Статика жидкостей и газов

Жидкие и газообразные тела характерны тем, что меняют свою *форму* при воздействии тел *извне*. При изменении объема возникают em упругие силы, которые уравновешивают действие *внешних сил*.

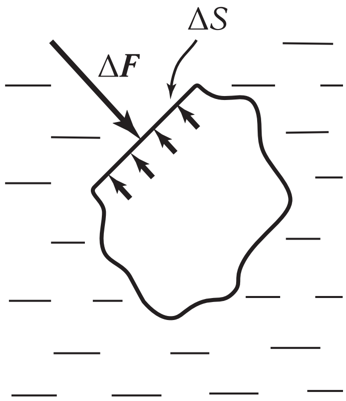


Рис. 62

Равнодействующая сил, направленных по нормали и отнесенная к площади называется давлением $p = \Delta f/\Delta S$ или $p = df/dS$. Давление – скаляр, измеряется в системе СИ в н/м^2.

9.2. Гидродинамика

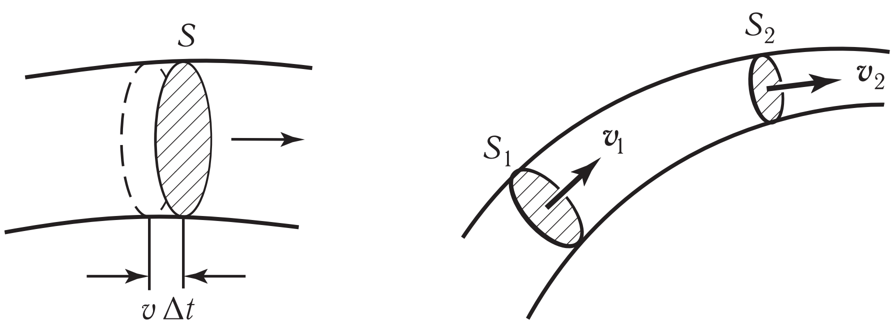


Рис. 63

За время Δt через сечение S пройдут все частицы, находящиеся на расстоянии $v\Delta t$ (рисунок 63, слева).

Через сечение пройдет объем жидкости равный: $Sv\Delta t$. Если жидкость несжимаема, то $S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t$ (рисунок 63, справа).

Отсюда следует, что в любом сечении $Sv = \text{const}$.

Это соотношение — описывает теорему о *неразрывности струи*.

9.3. Уравнение Бернулли

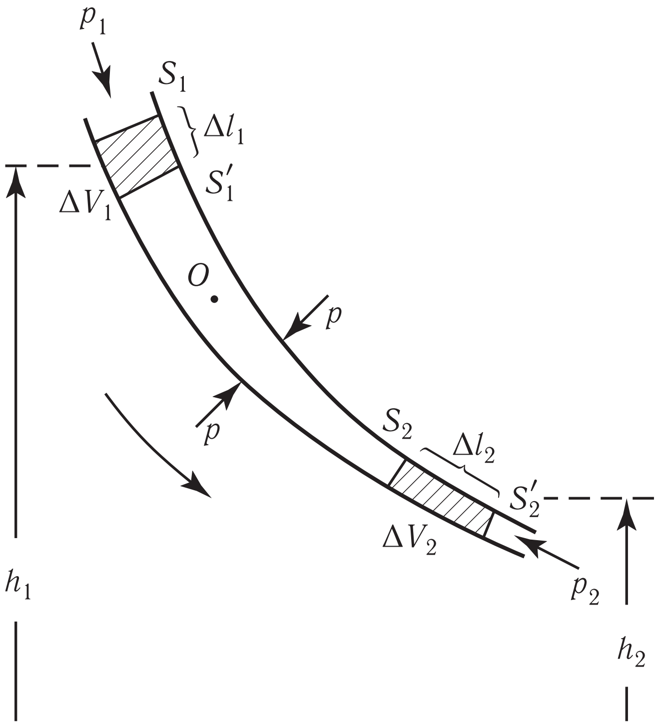


Рис. 64

Жидкость, в которой отсутствует внутреннее трение — это идеальная жидкость.

За время Δt объем жидкости в трубке переместиться на Δl_1 (рисунок 64). Исходя из вышеизложенного, можно записать:

$$S_1\Delta l_1 = \Delta V_1 \quad \text{и} \quad S_2\Delta l_2 = \Delta V_2\,; \quad \Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$$

Приращение энергии запишем в виде:

$$\Delta E = \left(\frac{\rho\Delta V v_2^2}{2} + \rho\Delta V g h_2\right) - \left(\frac{\rho\Delta V v_1^2}{2} + \rho\Delta V g h_1\right)$$

С другой стороны, работа сил давления будет определяться как:

$$A = p_1S_1\Delta l_1 - p_2S_2\Delta l_2 = (p_1 - p_2)\Delta V$$

Поскольку $\Delta E = A$, получаем следующее соотношение:

$$\left(\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2\right) - \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1\right) = (p_1 - p_2)$$

откуда следует *соотношение Бернулли*:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const} \tag{161}$$

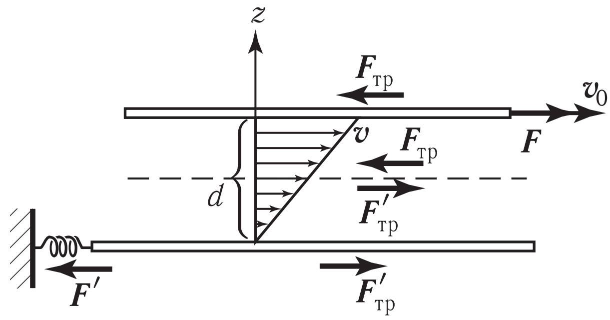


Рис. 65

9.4. Силы внутреннего трения

В жидкость погружены две пластины (рисунок 65)). Нижняя — удерживается, верхняя — движется с постоянной скоростью v_0 . Для этого необходимо воздействовать на верхнюю пластину, с силой, которая уравновешивается силой трения.

$$F_{тр} = \eta(v_0/d)S \tag{162}$$

где η — *коэффициент внутреннего трения* или *коэффициент вязкости*.

Ламинарное и турбулентное течение: $Re = \rho v_0 l/\eta$.

Ламинарное — жидкость движется послойно $Re < 1000$.