

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

ПАРФЕНОВ В.В., ЗАКИРОВ Р.Х.

ФИЗИКА ПОЛУПРОВОДНИКОВ

(методическое пособие к практикуму по физике твердого тела)

Казань 2001

Печатается по решению Редакционно-издательского совета физического факультета

Парфенов В.В., Закиров Р.Х. Физика полупроводников (элементы теории, руководство и задания к лабораторным работам). Учебно-методическое пособие для студентов физического факультета. Казань. 2001.

Методическое пособие предназначается для студентов четвертого курса радиофизических специальностей при выполнении ими работ по физике полупроводников на практикуме по физике твердого тела. Оно также может быть полезно при изучении соответствующих разделов общих лекционных курсов «Физика твердого тела», «Физика конденсированного состояния вещества» и спецкурса «Физика полупроводников».

Рецензент:

Фаттахов Я.В., к. ф.-м. н., старший научный сотрудник лаборатории радиационной физики КФТИ КНЦ РАН

Издание подготовлено при поддержке ФЦП «Интеграция»

© Физический факультет Казанского государственного университета, 2001

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ (как работать с методическим пособием).

Методическое пособие рассчитано на студентов 4-го курса физического факультета, знакомых с курсом «Квантовая механика» и приступивших к изучению общего курса «Физика твердого тела» («Физика конденсированного состояния вещества»), а также спецкурса «Физика полупроводников». Оно содержит краткие сведения по электронной (зонной) теории полупроводников, сведения по явлениям переноса в полупроводниках, фотоэлектрическим явлениям и электролюминесценции и предназначено для помощи при подготовке соответствующих работ практикума «Физика твердого тела». В данное пособие практически не вошли вопросы, связанные с физикой контактных явлений в полупроводниках. Они войдут в методическое пособие «Физика полупроводниковых приборов», переиздание которого запланировано на ближайшее время.

Основано методическое пособие на лекционном курсе «Физика полупроводников», который читается Парфеновым В.В. на физическом факультете с 1973 г., а также на методических разработках Закирова Р.Х. В связи с тем, что соответствующий практикум в течение этих лет менял свою структуру, название, состав лабораторного оборудования, авторы не считают нужным давать в методическом пособии конкретную информацию о лабораторных макетах и порядке выполнения работ, относя это к представленным в отдельных папках «Указаниям по выполнению работ». Кроме того, авторы прекрасно осознают тот факт, что в рамках небольшого по объему методического пособия невозможно в полной мере охватить все аспекты описываемых явлений. Предполагается, что дополнительную информацию читатели почерпнут из учебников и монографий. Список основной литературы приводится в конце методического пособия; дополнительной – после каждой темы. Слова, словосочетания и фразы, выделенные жирным шрифтом, должны помочь студенту составить план ответа. Блоки текста, выделенные мелким шрифтом, представляют дополнительную информацию по теме.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить признательность рецензенту, старшему научному сотруднику лаборатории радиационной физики КФТИ КНЦ РАН Фаттахову Я.В., заведующему кафедрой физики твердого тела КГУ, профессору Садыкову Э.К. за внимательное рецензирование рукописи и ряд полезных замечаний, а также магистрам кафедры ФТТ КГУ Ивлеву А.П. и Юричуку А.А. за помощь в оформлении методического пособия.

Введение: элементы зонной теории твердых тел.

По величине электропроводности принято подразделять твердые тела на три основных класса:

диэлектрики, для которых удельная электропроводность $\sigma < 10^{-12} \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$;

полупроводники - $10^5 > \sigma > 10^{-12} \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$;

металлы - $\sigma > 10^5 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$.

Полупроводники, таким образом, представляют **промежуточный по электропроводности** класс веществ, весьма разнообразных по химической природе. К ним относятся прежде всего атомарные, или **элементарные** полупроводники (германий - **Ge**, кремний - **Si**, селен - **Se**, теллур - **Te**); **химические соединения** или **интерметаллиды** (**GaAs** - арсенид галлия, **CdS**-сульфид кадмия и т.д.); фазы переменного состава, т.н. **твердые растворы** (**Ga_xIn_{1-x}Sb**, **Pb_xSn_{1-x}Te** и т.п.); ряд органических соединений и др.

Электропроводность всех этих твердых тел по своей величине попадает в представленный выше интервал значений, а также очень существенно **зависит от внешних условий**, меняясь при изменении температуры образца, внешнего давления, при освещении, облучении потоком ядерных частиц и т. д. Более того, электропроводность (и другие электронные свойства полупроводников) сильно **зависят от предыстории образца**: способа получения, сорта и количества примесей в нем.

Для того, чтобы понять причины этого необходимо рассмотреть электронную структуру твердых тел (**зонную структуру**). Основы зонной теории твердых тел заложены в 20-30-е годы XX века, когда для описания поведения электронов в кристаллах были применены **принципы квантовой механики**.

Большинство используемых в настоящее время в электронной технике полупроводников представляют собой **кристаллические твердые тела**, обладающие трехмерной пространственной периодичностью в расположении своих структурных элементов - атомов, ионов или молекул.

Наиболее общее выражение для волновой функции электрона в кристалле имеет вид

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) . \quad (1)$$

Здесь \vec{r} - радиус-вектор электрона; \vec{k} - волновой вектор электрона; $u_{\vec{k}}(\vec{r})$ - функция с такой же пространственной периодичностью, как и кристаллическая решетка. Это утверждение носит название **теоремы Блоха**.

Спектр энергий электрона в кристалле ε_k можно получить, решив уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \varepsilon_k \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) . \quad (2)$$

$V(\vec{r})$ - потенциал, в котором движется электрон. Он возникает вследствие присутствия ионов в узлах кристаллической решетки и обладает той же пространственной периодичностью, что и сама решетка.

Среди многих методов решения уравнения Шредингера для нахождения спектра энергий электронов в полупроводниках наилучшие результаты дают методы, в той или иной степени базирующиеся на приближении **сильной связи** – методе **линейной комбинации атомных орбиталей (ЛКАО)**.

Как следует из самого названия метода, в качестве «блховской» функции выбирается линейная комбинация «атомных» волновых функций

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j^N C_j \phi_0(\vec{r} - \vec{R}_j) . \quad (3)$$

Здесь N – количество атомов в кристалле; \vec{R}_j - их радиусы векторы; $\phi_0(\vec{r} - \vec{R}_j)$ - «атомные» волновые функции. Для того, чтобы волновая функция удовлетворяла условиям теоремы Блоха, коэффициенты C_j выбираются в виде $C_j = e^{i\vec{k}\vec{R}_j}$.

При решении уравнения Шредингера (2) кристаллический потенциал $V(\vec{r} - \vec{R}_j)$ удобно представить в виде суммы двух слагаемых

$$V(\vec{r} - \vec{R}_j) = V_0(\vec{r} - \vec{R}_j) + V'(\vec{r} - \vec{R}_j), \quad (4)$$

где $V'(\vec{r} - \vec{R}_j)$ - «добавочный» потенциал, дающий при сложении с «атомным» потенциалом $V_0(\vec{r} - \vec{R}_j)$ периодический потенциал кристаллической решетки $V(\vec{r} - \vec{R}_j)$. «Добавочный» потенциал мал внутри элементарной ячейки кристалла с центром \vec{R}_j и велик за пределами элементарной ячейки. В то же время за пределами элементарной ячейки будут экспоненциально убывать «атомные» волновые функции $\phi_0(\vec{r} - \vec{R}_j)$. Таким образом эти две величины нигде одновременно не достигают больших значений. Отметим также, что первое слагаемое в уравнении (2) в сумме с «атомным» потенциалом $V_0(\vec{r} - \vec{R}_j)$ дают оператор Гамильтона для связанного на j -ом атоме электрона

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_0(\vec{r} - \vec{R}_j). \quad (5)$$

Решение уравнения (2) удобно представить в виде суммы трех слагаемых

$$\varepsilon(k) = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3, \quad (6)$$

где

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{N} \int \sum_{i,j} e^{i\vec{k}(\vec{R}_j - \vec{R}_i)} \phi_0^*(\vec{r} - \vec{R}_i) \hat{H}_0 \phi_0(\vec{r} - \vec{R}_j) d\vec{k} d\vec{r}; \quad (7)$$

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{1}{N} \int \sum_{i=j} \phi_0^*(\vec{r} - \vec{R}_i) V' \phi_0(\vec{r} - \vec{R}_j) d\vec{k} d\vec{r}; \quad (8)$$

$$\mathfrak{S}_3 = \frac{1}{N} \int \sum_{i \neq j} e^{i\vec{k}(\vec{R}_j - \vec{R}_i)} \phi_0^*(\vec{r} - \vec{R}_i) V' \phi_0(\vec{r} - \vec{R}_j) d\vec{k} d\vec{r}. \quad (9)$$

Нетрудно убедиться, что первый из интегралов будет равен нулю при $i \neq j$ и будет равен энергии электрона в изолированном атоме при $i = j$. Второй из интегралов не будет зависеть от волнового вектора электрона и даст небольшую добавку к энергии «атомного» уровня. Напомним, что потенциал $V'(\vec{r} - \vec{R}_j)$ и атомная волновая функция $\phi_0(\vec{r} - \vec{R}_j)$ нигде в кристалле не достигают одновременно больших значений. Если теперь перенести начало координат в узел R_i и рассматривать взаимодействие i -го атома только с ближайшими атомами, то

$$\varepsilon(k) = A - \sum_j^z B(R_j) e^{i\vec{k}\vec{R}_j}. \quad (10)$$

Здесь $A = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2$; $B(\vec{R}_j)$ - т.н. **интегралы перекрытия**, величина которых тем больше, чем сильнее перекрываются электронные оболочки i -го и соседних j -ых атомов; z -число ближайших соседних атомов кристалла.

В частности, для простой кубической решетки таких соседей будет 6, а расстояние от начала координат до ближайшего соседнего атома будет равно a -постоянной кристаллической решетки. Т. е. для такого кристалла

$$\varepsilon(\vec{k}) = A - 2B(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a). \quad (11)$$

Как видно из (11) **энергия электрона** в кристалле является **периодической** функцией его волнового вектора \vec{k} . Поэтому, рассматривая энергетический спектр электронов в кристалле, можно ограничиться рамками **первой зоны Бриллюэна** (см. методич. пособие «Структура и динамика кристаллической решетки») - рассматривать изменения волнового вектора в пределах $-\pi/a \leq \vec{k} \leq \pi/a$.

На рис.1 приведена зависимость $\mathcal{E}(k)$ для электрона в кристалле и там же, для сравнения, зависимость $\mathcal{E}(k)$ (**закон дисперсии**) для свободного электрона – электрона в вакууме, для которого, как известно,

$$\varepsilon = \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{P^2}{2m_0} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0}. \quad (12)$$

Здесь m_0 – масса свободного электрона; v - его скорость; $P = m_0 v$ – импульс.

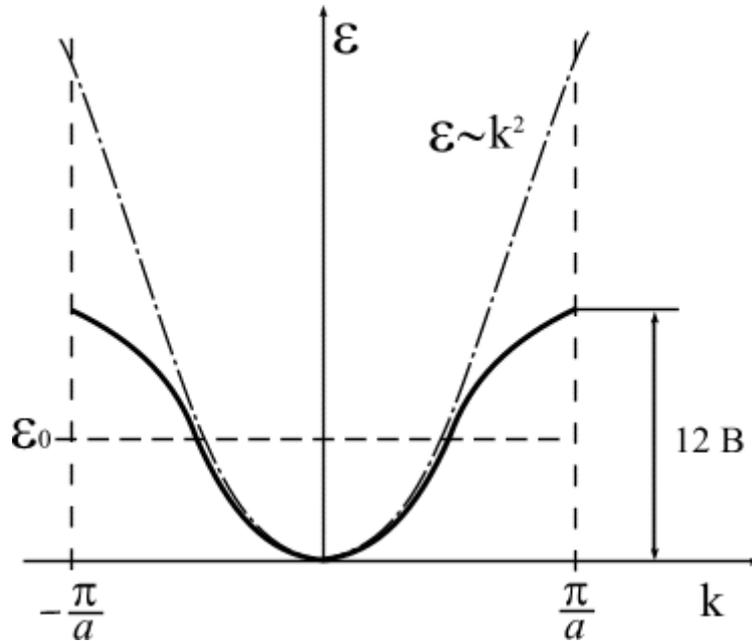


Рис.1. Зависимость энергии от волнового вектора для электрона в кристалле (сплошная линия); для электрона в вакууме (штрих-пунктир); штриховой линией показан «атомный» энергетический уровень.

Видно, что спектр энергий электрона в кристалле имеет гораздо больше общих черт с законом дисперсии для свободного электрона, чем с «атомным» энергетическим уровнем.

Таким образом, **при образовании кристалла** за счет взаимодействия электронных оболочек атомов происходит **расщепление «атомных» энергетических уровней в «энергетические зоны»**. Величина такого расщепления зависит от величины межатомного взаимодействия. В частности, для рассмотренного выше примера, энергия электрона изменяется в пределах от $\varepsilon = A - 6V$ при $\vec{k} = 0$ до $\varepsilon = A + 6V$ при $k_x = k_y = k_z = \pm \pi/a$, т.е ширина энергетической зоны составляет 12 В.

В пределах этой «разрешенной» энергетической зоны электроны могут менять свой волновой вектор, импульс, энергию и координату, т.е. **двигаться по кристаллу**.

Для того, чтобы понять, как происходит это движение, рассмотрим заполнение энергетических зон электронами в металлах, полупроводниках и диэлектриках.

Самые «глубокие» зоны, т.е. энергетические зоны, образованные электронами глубоколежащих оболочек, одинаковы для всех веществ. Во-первых – они очень узкие, больше похожие на «атомные» электронные уровни, т.к. электроны глубоколежащих оболочек слабо взаимодействуют между собой. Во-вторых – они почти всегда полностью заполнены электронами (исключения составляют d – зоны переходных металлов и f – зоны лантаноидов (см. методич. пособие «Физика магнетиков»)).

Наиболее **сильно взаимодействуют** между собой электроны самой верхней – **валентной оболочки**. Для них ширина энергетической «валентной» зоны максимальна и достигает 5-10 электронвольт (эВ).

Количество состояний («подуровней») в валентной зоне равно zN , где N – количество атомов в кристалле, z – валентность атомов. Например, для щелочных металлов (Li, Na, K и т.д.), число разрешенных для электронов состояний равно N . В каждом из этих состояний может находиться **только 2 электрона** с противоположными спинами. Т.к. любую систему уровней электроны начинают заполнять «снизу», с минимальных энергий, то в щелочных металлах будет заполнено электронами ровно $N/2$ состояний, т. е. половина валентной зоны (рис.2а). **Последний заполненный электронами уровень** зоны называется «**уровнем Ферми**» - F , и за ним сразу же следует ближайший свободный уровень энергии. При любых температурах и любых электрических полях электроны могут переходить с заполненных уровней, лежащих вблизи уровня Ферми на ближайшие свободные уровни. Этим и объясняется высокая электропроводность и теплопроводность металлов, характерный для них «металлический» блеск и т. д. Для всех металлов, не только для щелочных, характерно **частичное заполнение электронами валентной зоны**, которая одновременно является и «**зоной проводимости**».

Для **полупроводников и диэлектриков** ситуация совершенно иная. Их **валентная зона** при $T=0$ К **полностью заполнена** электронами, а **следующая** разрешенная зона при этой температуре **пуста** и **отделена** от валентной зоны интервалом энергий, которые электроны принимать не могут – «**запрещенной зоной**» - ϵ_g (рис.2б).

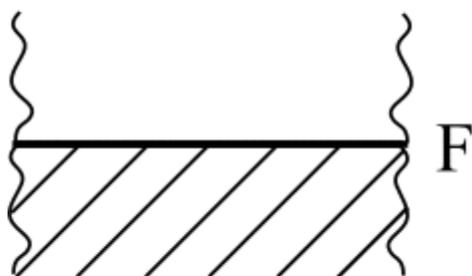


Рис.2а. Заполнение электронами энергетической зоны в металлах. Заполненные состояния зашированы

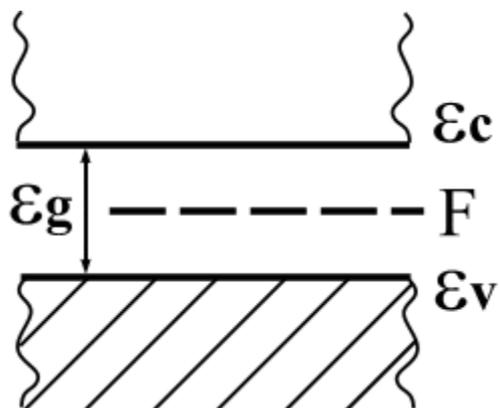


Рис. 2б. Заполнение электронами энергетических зон в полупроводниках и диэлектриках

Если между металлами – с одной стороны, и полупроводниками и диэлектриками – с другой, существует принципиальная разница в заполнении электронами энергетических зон (для металлов обязательно наличие **частично** заполненной зоны), то между полупроводниками и диэлектриками разница только «количественная» – в **ширине запрещенной зоны**. К полупроводникам принято относить вещества, ширина запрещенной зоны которых $0 < \epsilon_g \leq 3$ эВ. Если же ширина запрещенной зоны **больше 3 эВ**, вещество считают **диэлектриком**.

Ширина запрещенной зоны большинства важнейших полупроводниковых материалов составляет ≈ 1 эВ. Так, для германия $\epsilon_g = 0,69$ эВ, кремния - 1,09 эВ, арсенида галлия – 1,43 эВ. Ширина запрещенной зоны – важнейшая характеристика полупроводника. Кроме всего прочего, ширина запрещенной зоны определяет и область применения полупроводникового материала. Так, например, приборы на основе **контактных явлений** будут работоспособны при комнатной температуре ($T=300$ К), только если $\epsilon_g > 0,5$ эВ. Приборы на основе полупроводников с меньшей шириной запрещенной зоны (арсенид и антимонид индия, теллурид свинца и т.д.)

требуют для нормальной работы охлаждения. Кроме **ширины запрещенной зоны** важное значение имеет и **тип зонной структуры**. В зависимости от **взаимного расположения экстремумов** разрешенных зон («потолка» валентной зоны и «дна» зоны проводимости) в «пространстве волновых векторов» энергетическая структура полупроводников может быть **прямозонной** (рис.3а) – экстремумы зон находятся в **одной точке** k -пространства, и **непрямозонной**, когда экстремумам разрешенных энергетических зон соответствуют **разные значения** волнового вектора (рис.3б). Тип зонной структуры также требуется учитывать при изготовлении полупроводниковых приборов – так, например, для изготовления **полупроводниковых инжекционных лазеров** подходят только **прямозонные полупроводники**.

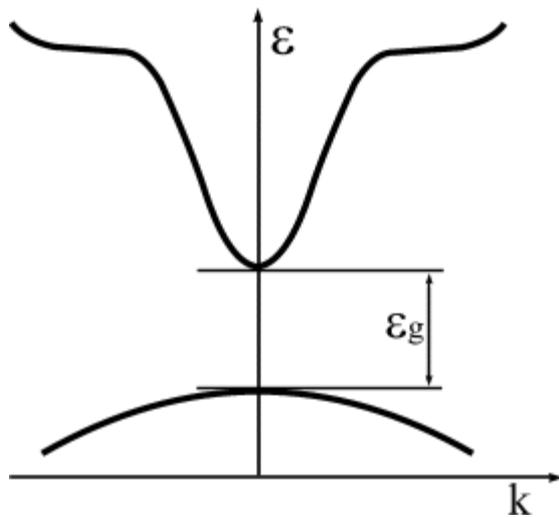


Рис.3а. Прямозонный полупроводник (*GaAs, InAs, InP* и т.н.)

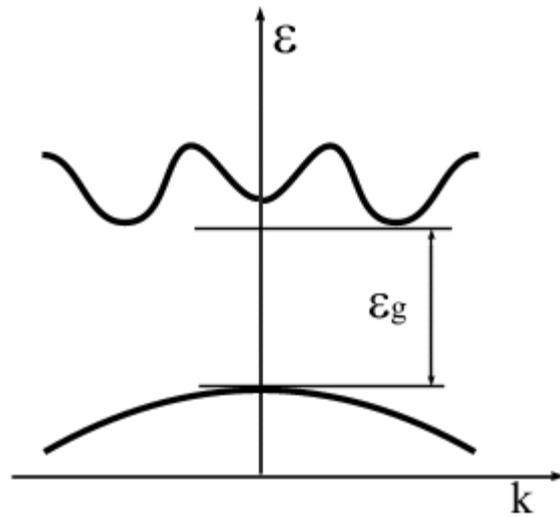


Рис.3б. Непрямозонный полупроводник (*Ge, Si, GaP* и т.н.)

При температуре абсолютного нуля в зоне проводимости полупроводников и диэлектриков отсутствуют электроны, т.е. электропроводность, вызванная электронами зоны проводимости, отсутствует. Перемещение электронов по уровням валентной зоны также невозможно – все энергетические состояния там заняты. Но так выглядит заполнение энергетических зон полупроводников только при абсолютном нуле температур.

При $T \neq 0$ часть электронов может получить энергию, **достаточную** для того, чтобы перейти **из валентной зоны в зону проводимости**. Это соответствует «освобождению» электрона из ковалентной химической связи, удерживающей его у атома. Такой **свободный** (в пределах кристалла, разумеется) электрон может теперь **двигаться по кристаллу**

при наличии в образце электрических полей, градиентов температуры и т.д.

В валентной же зоне появляется **свободный уровень** – уровень, с которого ушел электрон, и появляется **возможность движения** для электронов валентной зоны – способом последовательного заполнения этого свободного уровня. Для описания такого движения удобно воспользоваться формализмом **«дырки»**, т. е. описывать не движение всей совокупности электронов валентной зоны, а **движение** по кристаллу этого **свободного**, не занятого электроном, **состояния**. Такому состоянию приписываются свойства частицы с **положительным** зарядом $+e$. Для описания движения заряженных частиц – электронов и дырок под действием внешних полей (электрического, магнитного, теплового), частицам следует приписать не только заряд, но и динамическую характеристику – массу, которая, вообще говоря, не совпадает с массой свободного электрона и носит название **«эффективной массы»**. Причина введения вместо массы частицы – эффективной массы заключается в том, что помимо внешних полей на заряженные частицы действуют внутрикристаллические поля, создаваемые ионами, расположенными в узлах кристаллической решетки. Учет влияния этих полей чрезвычайно усложняет уравнения движения заряженных частиц, и, чтобы избежать такого усложнения, выполняется процедура **«перенормировки массы»** – вместо массы свободного электрона m_0 вводится эффективная масса электронов m_n и дырок - m_p . Для рассмотренного выше примера эффективную массу электрона можно получить, если разложить в ряд Тейлора выражение 11 при $\vec{k} \rightarrow 0$ и ограничится первыми двумя слагаемыми этого разложения:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{k}) &= A - 2B \left(1 - \frac{k_x^2 a^2}{2} + 1 - \frac{k_y^2 a^2}{2} + 1 - \frac{k_z^2 a^2}{2} + \dots \right) = A - 6B + Ba^2 k^2 = \\ &= \text{const} + Ba^2 k^2 = \text{const} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}. \end{aligned} \quad (13)$$

Такое разложение оправданно, т.к. при не очень высоких концентрациях электроны и дырки заполняют состояния вблизи дна зоны проводимости и потолка валентной зоны, соответственно.

Эффективная масса $m_n = \frac{\hbar^2}{2Ba^2}$ оказалась зависящей от параметра кристаллической решетки a и от величины интеграла перекрытия B . Более того, эффективная масса может быть **тензорной** (для кристаллов с более низкой, чем кубическая, симметрией) и **отрицательной** величиной (в этом несложно убедиться, выполнив разложение в ряд соотношения 11 при $\vec{k} \rightarrow \pi/a$). Отметим также, что эффективная масса дырок обычно превышает эффективную массу электронов, т.к. величина интегралов перекрытия для более высоко расположенной зоны проводимости больше, чем для валентной зоны.

1. Температурная зависимость электропроводности полупроводников.

Как отмечалось во **Введении**, с ростом температуры в полупроводнике будет появляться все больше **свободных носителей электрического заряда** – электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне. Если внешнее электрическое поле отсутствует, то движение этих заряженных частиц носит **хаотический характер** и ток через любое сечение образца равен нулю. Среднюю скорость частиц – т.н. «тепловую скорость» можно рассчитать по той же формуле, что и среднюю тепловую скорость молекул идеального газа

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad (1)$$

где k - постоянная Больцмана; m -эффективная масса электронов или дырок.

При приложении внешнего электрического поля в полупроводнике появится направленная, «**дрейфовая**» компонента скорости v_E – по полю у дырок, против поля – у электронов, т.е. через образец потечет электрический ток. Плотность тока j будет складываться из плотностей «электронного» j_n и «дырочного» j_p токов:

$$j = j_n + j_p = env_n + epv_p, \quad (2)$$

где n, p - концентрации свободных электронов и дырок; v_n, v_p – дрейфовые скорости носителей заряда.

Здесь следует заметить, что хотя заряды у электрона и дырки – противоположные по знаку, но и векторы дрейфовых скоростей направлены в противоположные стороны, т. е. суммарный ток фактически является суммой модулей электронного и дырочного токов.

Очевидно, что скорости v_n и v_p будут сами зависеть от внешнего электрического поля (в простейшем случае – линейно). Введем коэффициенты пропорциональности μ_n и μ_p , называемые «подвижностями» носителей заряда

$$\mu_n = v_n/E; \quad \mu_p = v_p/E, \quad (3)$$

и перепишем формулу 2 в виде:

$$j = en\mu_n E + ep\mu_p E = \sigma_n E + \sigma_p E = \sigma E. \quad (4)$$

Здесь σ - электропроводность полупроводника, а σ_n и σ_p - ее электронная и дырочная составляющие, соответственно.

Как видно из (4) электропроводность полупроводника определяется концентрациями свободных носителей заряда в нем и их подвижностями. Это будет справедливым и для электропроводности металлов. Но в **металлах** концентрация электронов очень велика $n_{мет} \sim N \approx 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и не зависит от температуры образца. **Подвижность** электронов в металлах **убывает с температурой** вследствие увеличения числа столкновений электронов с тепловыми колебаниями кристаллической решетки, что и приводит к уменьшению электропроводности металлов с ростом температуры. В **полупроводниках** же основной вклад в температурную зависимость электропроводности вносит **зависимость от температуры концентрации** носителей заряда.

Рассмотрим процесс теплового возбуждения (**генерации**) электронов из валентной зоны полупроводника в зону проводимости. Хотя средняя энергия тепловых колебаний атомов кристалла $\langle E_T \rangle = 3/2 kT$ составляет, например, при комнатной температуре всего 0,04 эВ, что намного меньше ширины запрещенной зоны большинства полупроводников, среди атомов кристалла будут и такие, энергия колебаний которых соизмерима с ϵ_g . При передаче энергии от этих атомов электронам, последние переходят в зону проводимости. Количество электронов в интервале энергий от ϵ до $\epsilon + d\epsilon$ зоны проводимости можно записать как:

$$dn(\epsilon) = g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon, \quad (5)$$

где $g(\epsilon) = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n)^{3/2} \epsilon^{1/2}$ - плотность энергетических уровней (6);

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - F}{kT}\right) + 1} \quad - \text{ вероятность заселения уровня с}$$

энергией ε электроном (**функция распределения Ферми**). (7)

В формуле (7) символом F обозначен т.н. **уровень Ферми**. В металлах уровень Ферми – **последний занятый электронами** уровень при абсолютном нуле температуры (см. Введение). Действительно, $f(\varepsilon) = 1$ при $\varepsilon < F$ и $f(\varepsilon) = 0$ при $\varepsilon > F$ (рис.1).

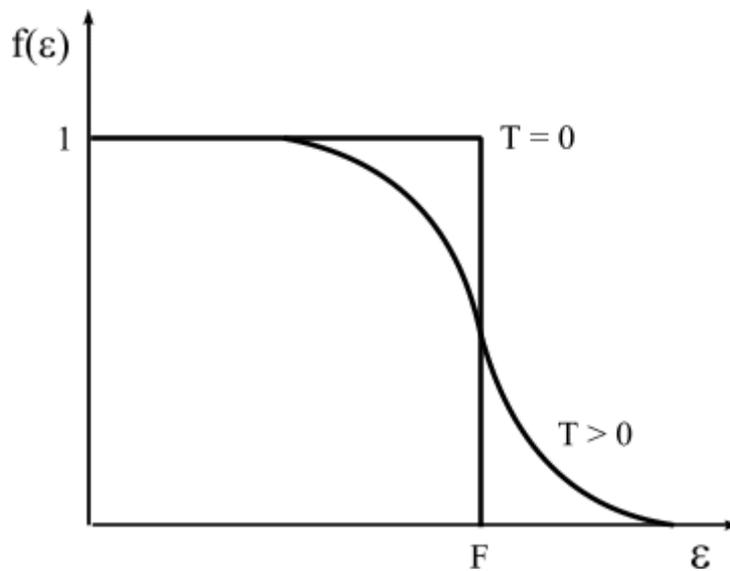


Рис.1. Распределение Ферми-Дирака; ступенчатое при температуре абсолютного нуля и «размытое» при конечных температурах.

В полупроводниках, как мы увидим в дальнейшем, уровень Ферми обычно находится **в запрещенной зоне**, т.е. на нем не может находиться электрон. Однако и в полупроводниках при $T = 0$ все состояния, лежащие ниже уровня Ферми, заполнены, а состояния выше уровня Ферми – пусты. При конечной температуре вероятность заселения электронами уровней с энергией $\varepsilon > F$ уже не равна нулю. Но концентрация электронов в зоне проводимости полупроводника все же намного меньше числа свободных энергетических состояний в зоне, т.е. $f(\varepsilon) \ll 1$. Тогда в знаменателе (7) можно пренебречь единицей и записать функцию распределения в «классическом» приближении:

$$f(\varepsilon) \approx \exp\left(\frac{F - \varepsilon}{kT}\right). \quad (8)$$

Концентрацию электронов в зоне проводимости можно получить, проинтегрировав (5) по зоне проводимости от ее дна - E_1 до вершины - E_2 :

$$n(F, T) = \int_{E_1}^{E_2} dn = \frac{4\pi}{h^3} (2m_n)^{3/2} \int_0^{\infty} \varepsilon^{1/2} \exp\left(\frac{F - \varepsilon}{kT}\right) d\varepsilon. \quad (9)$$

В интеграле (9) за нуль отсчета энергий принято дно зоны проводимости, а верхний предел заменен на ∞ из-за быстрого убывания экспоненциального множителя с ростом энергии.

После вычисления интеграла получим:

$$n(F, T) = \frac{2}{h^3} (2\pi m_n kT)^{3/2} \exp\left(\frac{F}{kT}\right). \quad (10)$$

Вычисления концентрации дырок в валентной зоне дают:

$$p(F, T) = \frac{2}{h^3} (2\pi m_p kT)^{3/2} \exp\left(\frac{-\varepsilon_g - F}{kT}\right). \quad (11)$$

Для полупроводника, в составе которого отсутствуют примеси, т.н. **собственного** полупроводника, концентрация электронов в зоне проводимости должна быть равна концентрации дырок в валентной зоне (**условие электронейтральности**). (Отметим, что таких полупроводников в природе не существует, но при определенных температурах и определенных концентрациях примесей можно пренебречь влиянием последних на свойства полупроводника). Тогда, приравнявая (10) и (11), получаем для уровня Ферми в собственном полупроводнике:

$$F = -\frac{\varepsilon_g}{2} + \frac{3}{4} kT \ln \frac{m_p}{m_n} \approx -\frac{\varepsilon_g}{2}. \quad (12)$$

Т.е. при абсолютном нуле температур уровень Ферми в **собственном** полупроводнике расположен точно **посередине запрещенной зоны**, и проходит вблизи середины запрещенной зоны при не очень высоких температурах, несколько **смещаясь** обычно в **сторону зоны проводимости** (эффективная масса дырок, как правило, больше

эффективной массы электронов (см. Введение). Теперь, подставляя (12) в (10), для концентрации электронов получим:

$$n(T) \approx \frac{2}{h^3} (2\pi m_n kT)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_g}{2kT}\right). \quad (13)$$

Аналогичное соотношение получится и для концентрации дырок:

$$p(T) \approx \frac{2}{h^3} (2\pi m_p kT)^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_g}{2kT}\right). \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) с достаточной точностью позволяют рассчитать концентрации носителей заряда в **собственном полупроводнике**. Значения концентрации, вычисленные по этим соотношениям, называются **собственными** концентрациями. Например, для германия Ge, кремния Si и арсенида галлия GaAs при $T=300$ К они составляют $\approx 2,6 \cdot 10^{13}; 1,5 \cdot 10^{10}; 10^7 \text{ см}^{-3}$, соответственно. Практически же, для изготовления полупроводниковых приборов, применяются полупроводники со значительно более высокими концентрациями носителей заряда ($\approx 10^{15} \div 10^{19} \text{ см}^{-3}$). Большая, по сравнению с собственной, концентрация носителей обусловлена введением в полупроводник **электроактивных примесей** (существуют еще т.н. **амфотерные** примеси, введение которых в полупроводник не изменяет концентрацию носителей в нем). Примесные атомы в зависимости от валентности и ионного (ковалентного) радиуса могут по-разному входить в кристаллическую решетку полупроводника. Одни из них могут замещать атом основного вещества **в узле** решетки – примеси **замещения**. Другие располагаются преимущественно **в междоузлиях** решетки – примеси **внедрения**. Различно и их влияние на свойства полупроводника.

Допустим, что в кристалле из четырехвалентных атомов кремния часть атомов Si замещена атомами пятивалентного элемента, например, атомами фосфора P. Четыре валентных электрона атома фосфора образуют ковалентную связь с ближайшими атомами кремния. Пятый валентный электрон атома фосфора будет связан с ионным остовом **кулоновским взаимодействием**. В целом эта пара из иона фосфора с

зарядом $+e$ и связанного с ним кулоновским взаимодействием электрона будет напоминать атом водорода, вследствие чего такие примеси называются еще и **водородоподобными** примесями. **Кулоновское взаимодействие** в кристалле будет значительно **ослаблено** из-за электрической поляризации окружающих примесный ион соседних атомов. **Энергию ионизации** такого примесного центра можно оценить по формуле:

$$\varepsilon_I = \varepsilon_I^H \cdot \frac{1}{\chi^2} \cdot \frac{m_n}{m_0}, \quad (15)$$

где ε_I^H - первый потенциал ионизации для атома водорода – 13,5 эВ;

χ – диэлектрическая проницаемость кристалла ($\chi = 12$ для кремния).

Подставив в (15) эти значения и значение эффективной массы электронов в кремнии - $m_n = 0,26 m_0$, получим для энергии ионизации атома фосфора в кристаллической решетке кремния $\varepsilon_I = 0,024$ эВ, что существенно меньше ширины запрещенной зоны и даже меньше средней тепловой энергии атомов при комнатной температуре. Это означает во-первых, что примесные атомы гораздо легче ионизировать, чем атомы основного вещества и, во-вторых, - при комнатной температуре эти примесные атомы будут все ионизированы. Появление в зоне проводимости полупроводника электронов, перешедших туда с **примесных уровней**, не связано с образованием дырки в валентной зоне. Поэтому концентрация **основных носителей** тока – электронов в данном образце может на несколько порядков превышать концентрацию **неосновных носителей** – дырок. Такие полупроводники называются **электронными** или полупроводниками **n-типа**, а примеси, сообщаемые полупроводнику электронную проводимость, называются **донорами**. Если в кристалл кремния ввести примесь атомов трехвалентного элемента, например, - бора В, то одна из ковалентных связей примесного атома с соседними атомами кремния остается **незавершенной**. Захват на эту связь электрона с одного из соседних атомов кремния приведет в появлению

дырки в валентной зоне, т.е. в кристалле будет наблюдаться дырочная проводимость (полупроводник **p-типа**). Примеси, захватывающие электрон, называются **акцепторами**. На энергетической диаграмме полупроводника (рис.2) донорный уровень размещается ниже дна зоны проводимости на величину энергии ионизации донора, а акцепторный – выше потолка валентной зоны на энергию ионизации акцептора. Для водородоподобных доноров и акцепторов, какими являются в кремнии элементы V и III групп Периодической системы Менделеева, энергии ионизации примерно равны.

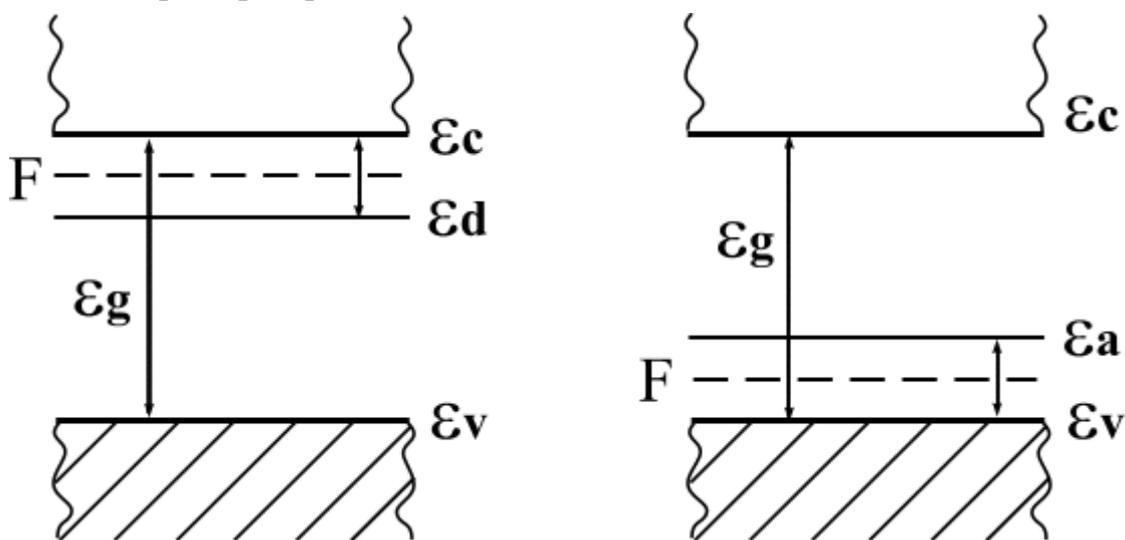


Рис.2. Энергетические диаграммы электронного(слева) и дырочного(справа) полупроводников. Показано положение уровней Ферми при температурах, близких к абсолютному нулю.

Вычисление концентрации носителей заряда в полупроводнике с учетом примесных электронных состояний – задача достаточно непростая и аналитическое решение ее можно получить только в некоторых частных случаях.

Рассмотрим полупроводник **n-типа** при **температуре**, достаточно **низкой**. В этом случае можно пренебречь собственной проводимостью. Все электроны в зоне проводимости такого полупроводника – это электроны, перешедшие туда с донорных уровней:

$$n = N_d - n_d. \quad (16)$$

Здесь N_d - концентрация донорных атомов;

n_d - число электронов, оставшихся еще на донорных уровнях ε_d :

$$n_d = N_d \cdot f(\varepsilon_d) = \frac{N_d}{1 + \exp\left(\frac{-\varepsilon_d - F}{kT}\right)}. \quad (17)$$

С учетом (10) и (17) уравнение 16 запишем в виде:

$$\frac{2}{h^3} (2\pi m_n kT)^{3/2} \exp\left(\frac{F}{kT}\right) = N_d - \frac{N_d}{1 + \exp\left(\frac{-\varepsilon_d - F}{kT}\right)}. \quad (18)$$

Решая это квадратное уравнение относительно $x = \exp\frac{F}{kT}$, получим

$$\exp\frac{F}{kT} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_d}{kT}\right) \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{2N_d h^3}{(2\pi m_n kT)^{3/2}} \exp\left(\frac{\varepsilon_d}{kT}\right)} - 1 \right]. \quad (19)$$

Рассмотрим решение уравнения при очень низких температурах (на практике – это обычно температуры порядка десятков градусов Кельвина), когда второе слагаемое под знаком квадратного корня много больше единицы. Пренебрегая единицами, получим:

$$F = -\frac{\varepsilon_d}{2} + \frac{1}{2} kT \ln \frac{N_d h^3}{2(2\pi m_n kT)^{3/2}}, \quad (20)$$

т.е. при низких температурах уровень Ферми расположен примерно посередине между донорным уровнем и дном зоны проводимости (при $T = 0\text{K}$ – точно посередине). Если подставить (20) в формулу для концентрации электронов (10), то можно видеть, что концентрация электронов растет с температурой по экспоненциальному закону

$$n = \frac{\sqrt{2N_d}}{h^{3/2}} (2\pi m_n kT)^{3/4} \exp\left(-\frac{\varepsilon_d}{2kT}\right). \quad (21)$$

Показатель экспоненты $\approx -\frac{\varepsilon_d}{2kT}$ указывает на то, что в данном диапазоне температур концентрация электронов растет за счет **ионизации донорных примесей**.

При более высоких температурах, - при таких, когда собственная проводимость еще незначительна, но выполняется условие $kT \gg \varepsilon_d$, второе слагаемое под корнем будет меньше единицы и используя соотношение

$$\sqrt{1+y} \approx 1 + \frac{y}{2} + \dots, \quad (22)$$

получим для положения уровня Ферми

$$F = kT \ln \frac{N_d h^3}{2(2\pi m_n kT)^{3/2}}, \quad (23)$$

а для концентрации электронов

$$n = N_d. \quad (24)$$

Все доноры уже ионизированы, концентрация носителей в зоне проводимости равна концентрации донорных атомов – это т.н. **область истощения примесей**. При еще более высоких температурах происходит интенсивный заброс в зону проводимости электронов из валентной зоны (ионизация атомов основного вещества) и концентрация носителей заряда снова начинает расти по экспоненциальному закону (13), характерному для **области с собственной проводимостью**. Если представить зависимость концентрации электронов от температуры в координатах $\ln n = f(1/T)$, то она будет выглядеть в виде ломаной линии, состоящей из трех отрезков, соответствующих рассмотренным выше температурным диапазонам (рис.3). Аналогичные соотношения, с точностью до множителя, получаются при вычислении концентрации дырок в полупроводнике p-типа.

При очень высоких концентрациях примесей ($\sim 10^{18} - 10^{20} \text{ см}^{-3}$) полупроводник переходит в т.н. **вырожденное** состояние. Примесные уровни расщепляются в **примесную зону**, которая может частично перекрыться с зоной проводимости (в электронных полупроводниках) или с валентной зоной (в дырочных). При этом концентрация носителей заряда практически перестает зависеть от температуры вплоть до очень высоких температур, т.е. полупроводник ведет себя как металл (**квазиметаллическая проводимость**). Уровень Ферми в вырожденных полупроводниках будет располагаться или очень близко от края соответствующей зоны, или даже заходить внутрь разрешенной энергетической зоны, так, что и зонная

диаграмма такого полупроводника будет похожа на зонную диаграмму металла (см. рис. 2а Введения). Для расчета концентрации носителей заряда в таких полупроводниках функцию распределения следует брать не в виде (8), как это делалось выше, а в виде квантовой функции (7). Интеграл (9) в этом случае вычисляется численными методами и носит название **интеграла Ферми-Дирака**. Таблицы интегралов Ферми-Дирака для значений $-2kT \leq F/kT \leq 10kT$ приведены, например, в монографии Л.С.Стильбанса. При $F/kT > 10kT$ степень вырождения электронного (дырочного) газа настолько высока, что концентрация носителей не зависит от температуры вплоть до температуры плавления полупроводника. Такие «вырожденные» полупроводники используются в технике для изготовления ряда электронных приборов, среди которых важнейшими являются **инжекционные лазеры и туннельные диоды**.

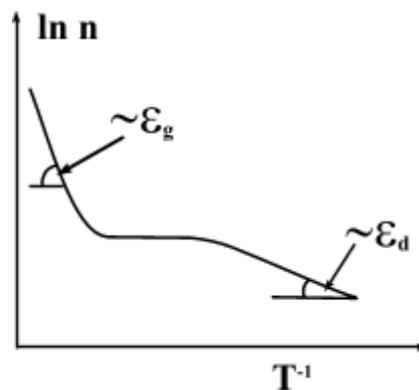


Рис.3. Температурная зависимость концентрации электронов в полупроводнике n-типа.

Определенный, хотя и менее существенный вклад, в температурную зависимость электропроводности будет вносить **температурная зависимость подвижности** носителей заряда. Подвижность, «макроскопическое» определение которой дано нами в (3), может быть выражена через «микроскопические» параметры — эффективную массу и **время релаксации импульса** $\langle \tau \rangle$ — среднее время свободного пробега электрона (дырки) между двумя последовательными столкновениями с дефектами кристаллической решетки:

$$\mu = \frac{e \langle \tau \rangle}{m}, \quad (25)$$

а электропроводность, с учетом соотношений (4) и (25) запишется, как:

$$\sigma = \frac{e^2 n \langle \tau \rangle}{m}. \quad (26)$$

В качестве дефектов – **центров рассеяния** могут выступать тепловые колебания кристаллической решетки – акустические и оптические **фононы** (см. методич. пособие «Структура и динамика...»), **примесные атомы** – ионизированные и нейтральные, лишние атомные плоскости в кристалле – **дислокации**, **поверхность** кристалла и **границы зерен** в поликристаллах и т.д. Сам процесс рассеяния носителей заряда на дефектах может быть **упругим** и **неупругим** – в первом случае происходит только изменение квазиимпульса $\hbar \vec{k}$ электрона (дырки); во-втором – изменение и квазиимпульса и энергии частицы. Если процесс рассеяния носителя заряда на дефектах решетки – **упругий**, то время релаксации импульса можно представить в виде степенной зависимости от энергии частицы: $\tau = \tau_0 \varepsilon^r$. Так, для наиболее важных случаев упругого рассеяния электронов на акустических фононах и ионах примеси

$$\tau_{\text{фон}} = \frac{\tau_0 \varepsilon^{-1/2}}{kT} \quad (27)$$

и

$$\tau_{\text{прим}} = \frac{\tau'_0 \varepsilon^{3/2}}{N_I}. \quad (28)$$

Здесь τ_0, τ'_0 - величины, не зависящие от энергии; N_I - концентрация **ионизированных** примесей любого типа.

Усреднение времени релаксации осуществляется по формуле:

$$\langle \tau \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \tau(\varepsilon) x^{3/2} \exp(-x) dx}{\int_0^{\infty} x^{3/2} \exp(-x) dx} ; \quad x = \frac{\varepsilon}{kT}. \quad (29)$$

С учетом (25)-(29) получим:

$$\mu_{\text{фон}} \sim T^{-3/2}; \quad \mu_{\text{прим}} \sim N_I^{-1} T^{3/2}. \quad (30)$$

Если в каком-либо диапазоне температур вклады в подвижность носителей, соответствующие разным механизмам рассеяния, сопоставимы по величине, то подвижность будет рассчитываться по формуле:

$$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{1}{\mu_i}, \quad (31)$$

где индекс i соответствует определенному механизму рассеяния: на примесных центрах, на акустических фононах, оптических фононах и т.д.

Типичная зависимость подвижности электронов (дырок) в полупроводнике от температуры показана на рис.4. При **очень низких** температурах (в районе абсолютного нуля) примеси еще не ионизированы, рассеяние происходит на **нейтральных** примесных центрах и подвижность практически **не зависит** от температуры (рис.4, участок а-б). С повышением температуры концентрация ионизированных примесей растет по экспоненциальному закону, а подвижность **падает** согласно (30) – участок б-в. В области **истощения примесей** концентрация ионизированных примесных центров уже не изменяется и подвижность растет, как $T^{3/2}$ (рис.4, в-г). При дальнейшем повышении температуры начинает преобладать рассеяние на акустических и оптических фононах и подвижность снова падает (г-д).

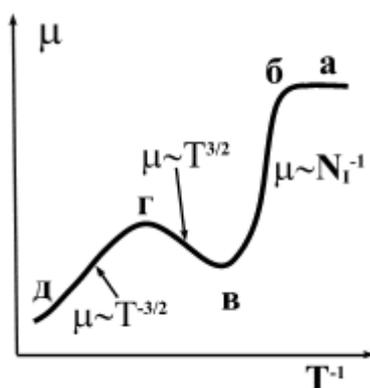


Рис.4. Типичная зависимость от температуры подвижности носителей заряда в полупроводнике.

Поскольку температурная зависимость подвижности в основном – степенная функция температуры, а температурная зависимость концентрации – в основном экспоненциальная, то и температурный ход электропроводности будет в основных чертах повторять температурную

зависимость концентрации носителей заряда. Это дает возможность достаточно точно **определять по температурной зависимости электропроводности важнейший параметр полупроводника – ширину его запрещенной зоны**, что и предлагается проделать в данной работе.

ЗАДАНИЕ

1. Измерить температурную зависимость электропроводности полупроводника и определить ширину его запрещенной зоны.
2. С помощью термозонда определить тип проводимости полупроводника.

Более подробные указания по выполнению работы содержатся в отдельной папке «Изучение температурной зависимости электропроводности компенсационным методом».

ЛИТЕРАТУРА

- 1) Цидильковский И.М. Электроны и дырки в полупроводниках (энергетический спектр и динамика), М., Наука, 1972.

2. Эффект Холла

Эффектом Холла называется появление **поперечной разности потенциалов** в проводнике, по которому течет **ток**, и который помещен во **внешнее магнитное поле**. Холловская разность потенциалов возникает в направлении, **перпендикулярном** и току, и внешнему магнитному полю, т.е. эффект Холла относится к т.н. «поперечным» **гальваномагнитным явлениям**, которые наблюдаются при совместном воздействии на образец внешних электрического и магнитного полей. Причиной всех гальваномагнитных явлений является отклонение траектории движущихся заряженных частиц – электронов и дырок под действием **силы Лоренца**:

$$F_{\Lambda} = e[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (1)$$

где \vec{v} - скорость частицы; \vec{B} - индукция внешнего магнитного поля.

Поскольку сила Лоренца направлена всегда перпендикулярно скорости частицы, то под ее действием электроны (дырки) будут двигаться по циклическим траекториям – окружностям, спиральям, циклоидам.

Характерная частота движения заряженной частицы по таким траекториям называется **циклотронной частотой**

$$\omega_C = \frac{eB}{m}; \quad (2)$$

m - эффективная масса (см. Введение).

Если магнитное поле невелико, то за время свободного пробега $\langle \tau \rangle$ между двумя последовательными столкновениями с дефектами решетки носитель заряда успеет пройти лишь небольшую дугу по циклической траектории, в сильных магнитных полях за время свободного пробега частица успевает сделать несколько «оборотов» по окружности (спирали, циклоиде). Следовательно, в **слабых** магнитных полях

$$\omega_C \langle \tau \rangle \ll 1 \quad (3a)$$

и

$$\omega_C \langle \tau \rangle \gg 1 \quad (3б)$$

в **сильных** магнитных полях.

Поворот траекторий носителей заряда в магнитном поле вызовет появление **поперечной** компоненты плотности тока j_y (рис.1), что, в свою очередь, вызовет **накопление заряда** на боковых гранях образца при разомкнутых «холловских» контактах 3 и 4 (это соответствует подключению к контактам вольтметра – прибора с большим входным сопротивлением). Накопление заряда на боковых гранях приведет к возникновению **холловской э.д.с.** U_H (поперечного **поля Холла** E_H). **Знак** холловской э.д.с. (направление поля Холла) будет определяться знаком **основных носителей заряда** в полупроводнике. Так, для геометрии эксперимента, изображенной на рис.1, правая грань будет заряжаться отрицательно, если основными носителями заряда являются электроны, и положительно - если образец имеет дырочную проводимость. Подчеркнем, что электроны и дырки будут отклоняться **к одной и той же** грани образца. Заряды этих частиц противоположны по знаку, но и дрейфовые скорости в электрическом поле направлены в противоположные стороны, т.е. сила Лоренца (1) будет направлена и для электронов, и для дырок в одну сторону. Накопление зарядов на боковой

границы не будет продолжаться бесконечно – за время, сравнимое с временем $\langle \tau \rangle$, т.е. за $\approx 10^{-12} \text{ с}$, холловское поле создаст ток j'_y , равный по величине и направленный противоположно току j_y . В результате **полный ток в поперечном направлении (по оси y) будет равным нулю, а стационарное значение холловского поля E_H будет пропорционально плотности тока через образец и индукции магнитного поля:**

$$E_H = R_H j_x B, \quad (4)$$

где R_H - коэффициент Холла.

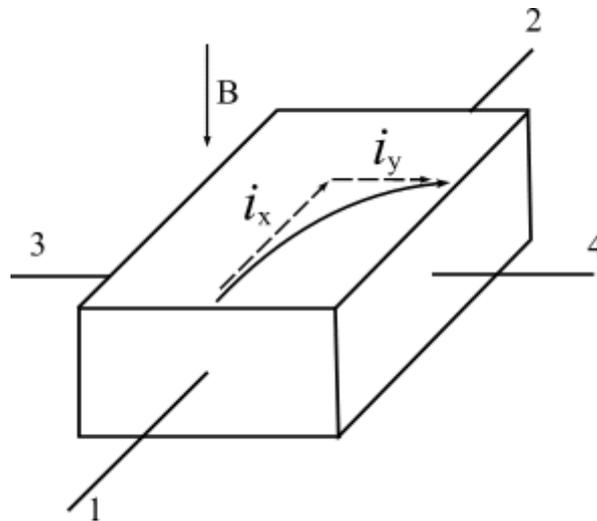


Рис.1. Схема эксперимента по измерению холловской э.д.с. На электроды 1 и 2 подается внешнее смещение и через них течет ток. Электроды 3 и 4 служат для регистрации э.д.с. Холла.

Для того, чтобы получить значение коэффициента Холла, запишем уравнение динамики для электрона:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\vec{E} + e[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (5)$$

Распишем его по координатам. Выберем геометрию рис.1, т.е. направим внешнее магнитное поле по оси Z . Отметим, что на движение электрона по оси Z магнитное поле влиять не будет. С учетом (2) получим:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{e}{m} E_x + \omega_C \dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{e}{m} E_y - \omega_C \dot{x} \end{cases} \quad (6)$$

Решением системы (6) будет в общем случае уравнение циклоиды

$$\begin{cases} x = a(1 - \cos \omega_C t) + b(\omega_C t - \sin \omega_C t) \\ y = b(1 - \cos \omega_C t) - a(\omega_C t - \sin \omega_C t) \end{cases} \quad (7)$$

в чем нетрудно убедиться подстановкой (7) в (6). Для коэффициентов a и b получим

$$\begin{cases} a = \frac{e}{m\omega_C^2} E_x \\ b = \frac{e}{m\omega_C^2} E_y \end{cases} \quad (8)$$

Теперь следует вычислить средние перемещения частиц и их средние скорости. Для этого необходимо усреднить уравнения (7) по времени, используя соотношение

$$\bar{u} = \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau} u \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt. \quad (9)$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \sin \omega_C t \frac{dt}{\tau} &= \frac{\omega_C \tau}{1 + \omega_C^2 \tau^2}; \\ \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos \omega_C t \frac{dt}{\tau} &= \frac{1}{1 + \omega_C^2 \tau^2}, \end{aligned}$$

получим для средних смещений электронов

$$\begin{cases} \bar{x} = a \frac{\omega_C^2 \tau^2}{1 + \omega_C^2 \tau^2} + b \omega_C \tau \frac{\omega_C^2 \tau^2}{1 + \omega_C^2 \tau^2}; \\ \bar{y} = b \frac{\omega_C^2 \tau^2}{1 + \omega_C^2 \tau^2} - a \omega_C \tau \frac{\omega_C^2 \tau^2}{1 + \omega_C^2 \tau^2} \end{cases} \quad (10),$$

а, поделив на τ , для средних скоростей запишем:

$$\begin{cases} \bar{v}_x = \frac{e}{m} E_x \frac{\tau}{1 + \omega_C^2 \tau^2} + \frac{e}{m} E_y \frac{\omega_C \tau^2}{1 + \omega_C^2 \tau^2}; \\ \bar{v}_y = \frac{e}{m} E_y \frac{\tau}{1 + \omega_C^2 \tau^2} - \frac{e}{m} E_x \frac{\omega_C \tau^2}{1 + \omega_C^2 \tau^2} \end{cases} \quad (11).$$

Необходимо еще провести усреднение по энергии частиц. Оно выполняется по формуле 29 работы 1. Теперь все готово, чтобы записать выражения для x и y -компонент плотности тока

$$\begin{cases} j_x = en \langle v_x \rangle = \frac{e^2 n}{m} \xi_1 E_x + \frac{e^2 n}{m} \omega_C \xi_2 E_y \\ j_y = en \langle v_y \rangle = \frac{e^2 n}{m} \xi_1 E_y - \frac{e^2 n}{m} \omega_C \xi_2 E_x \end{cases} \quad (12).$$

Здесь $\xi_1 = \left\langle \frac{\tau}{1 + \omega_C^2 \tau^2} \right\rangle$, $\xi_2 = \left\langle \frac{\tau^2}{1 + \omega_C^2 \tau^2} \right\rangle$.

Т.к. граничным условием наблюдения холловской разности потенциалов является равенство нулю y -компоненты тока, то определив из второго уравнения E_x через E_y и подставив в первое, запишем:

$$j_x = \frac{e^2 n}{m \omega_C} \cdot \frac{\xi_1^2}{\xi_2} E_y + \frac{e^2 n}{m} \omega_C \xi_2 E_y. \quad (13)$$

Сравнивая (4) и (13), для холловского поля и коэффициента Холла получим окончательно:

$$E_H \equiv E_y = \frac{j_x}{\frac{e^2 n}{m} \left(\frac{1}{\omega_C} \cdot \frac{\xi_1^2}{\xi_2} + \omega_C \xi_2 \right)}; \quad (14)$$

$$R_H = \frac{E_H}{j_x B} = \frac{1}{\frac{e^2 n}{m} \left(\frac{1}{\omega_C} \cdot \frac{\xi_1^2}{\xi_2} + \omega_C \xi_2 \right) B}. \quad (15)$$

Выражение (15) оказалось достаточно сложным для анализа. Поэтому рассмотрим частные случаи – коэффициент Холла в пределе

слабых и сильных магнитных полей. Но сначала выполним оценку – какие поля следует считать «слабыми» и «сильными»? Для этого перепишем соотношение (3) в более удобном виде. Так «сильными» полями будут считаться те, для которых

$$\omega_C \langle \tau \rangle = \frac{eB \langle \tau \rangle}{m} = \mu B \gg 1. \quad (16)$$

При величине подвижности носителей μ , равной $1000 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ ($0,1 \text{ м}^2/\text{В}\cdot\text{с}$), сильными будут считаться поля с индукцией $B > 10 \text{ Тл}$ (10^5 Гс), т.е. поля, которые **невозможно** получить с помощью обычного электромагнита. Такие поля можно получить с помощью, например, сверхпроводящего соленоида. Поэтому экспериментальная ситуация «слабого» поля встречается гораздо чаще.

Если магнитное поле – слабое, то в знаменателях выражений для ξ_1, ξ_2 (см.12) можно пренебречь $\omega_C \tau$ по сравнению с единицей, а также пренебречь вторым слагаемым в знаменателе (15) по сравнению с первым. Таким образом, в пределе **слабых магнитных полей** получим

$$R_H = \frac{1}{en} \cdot \frac{\langle \tau^2 \rangle}{\langle \tau \rangle^2} = \frac{A}{en}, \quad (17)$$

где A – **Холл-фактор**, величина которого зависит от **механизма рассеяния носителей заряда** в полупроводнике (см. работу 1). Так, если рассеяние электронов (дырок) происходит в основном на ионах примесей, то $A=1,93$; если преобладающим является рассеяние на тепловых колебаниях решетки, то $A=1,18$ и т.д.

В случае сильных магнитных полей, напротив, в знаменателях выражений для ξ_1, ξ_2 следует пренебречь единицей, а также первым слагаемым по сравнению со вторым в знаменателе (15). В **сильных магнитных полях** (15) превратится в простое соотношение

$$R_H = \frac{1}{en}, \quad (18)$$

т.е. Холл-фактор перестает зависеть от механизма рассеяния носителей заряда и будет всегда равен 1.

В случае дырочной проводимости образца соотношения для коэффициента Холла получатся точно такими же с заменой концентрации электронов n на концентрацию дырок p . Заметим также, что в отличие от электропроводности - коэффициент Холла зависит от знака носителей заряда. Принято считать его **отрицательным** для **электронного** полупроводника и **положительным** – для **дырочного**. Таким образом, измерение коэффициента Холла позволяет определить **концентрацию и знак** основных носителей заряда в полупроводнике. Кроме того, если одновременно измерить и электропроводность полупроводника, то можно рассчитать **холловскую подвижность** носителей заряда

$$\mu_H = R_H \sigma = \frac{A}{en} en\mu = A\mu, \quad (19)$$

которая с точностью до Холл-фактора A равна истинной, дрейфовой подвижности μ . По **температурной зависимости** коэффициента Холла можно определить **ширину запрещенной зоны** полупроводника или, если проводить измерения при низких температурах – при температурах ионизации примесей, то и **энергию примесного** (донорного или акцепторного) **уровня**. Действительно, поскольку $R_H \sim 1/n$, в области **собственной** проводимости коэффициент Холла будет **падать с ростом температуры** пропорционально $\exp(\varepsilon_g/2kT)$, а в области **ионизации примесей** – пропорционально $\exp(\varepsilon_d/2kT)$ (см. ф.13 и ф.21 работы 1). Следовательно, относительно простой эксперимент по измерению холловской разности потенциалов позволяет получить информацию о важнейших параметрах полупроводника – типе проводимости, концентрации и подвижности носителей заряда, ширине запрещенной зоны и энергии ионизации примесных уровней. Измерения коэффициента Холла в слабых и сильных магнитных полях при фиксированной температуре позволяет также определить **механизм рассеяния носителей заряда** (см. 17, 18).

Однако не всегда результаты измерений эффекта Холла просто интерпретировать. Все предыдущие соотношения будут справедливы для полупроводника с **ярко выраженным типом проводимости** – электронного или дырочного. В случае же, если в проводимости равноправно участвуют и дырки, и электроны, формула для коэффициента Холла будет иметь вид:

$$R_H = \frac{A}{|e|} \cdot \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2}. \quad (20)$$

Нетрудно убедиться, что при $n \gg p$ формула 20 переходит в 17 (при этом знак R_H будет отрицательным!), а при $p \gg n$ - в аналогичную формулу для дырочного полупроводника. В **собственном полупроводнике** $n = p$ и (20) превращается в

$$R_H = \frac{A}{|e|n} \cdot \frac{1 - \beta}{1 + \beta}; \quad \beta = \frac{\mu_n}{\mu_p}, \quad (21)$$

т.е. знак коэффициента Холла будет определяться знаком наиболее подвижных носителей заряда (обычно это – электроны). В этом случае с помощью соотношения (19) уже не удастся определить подвижность носителей. Более того, при равенстве подвижностей электронов и дырок коэффициент Холла будет равен нулю. Это является следствием того, что во внешнем магнитном поле носители заряда обоих знаков отклоняются к одной и той же грани образца (см. выше) и холловской э.д.с. не возникает.

В полупроводнике, с проводимостью, близкой к собственной, возникают проблемы не только с определением концентрации и подвижности носителей по формулам 19 или 20, но даже с определением знака основных носителей заряда. Так, в **дырочном полупроводнике** с не слишком большой концентрацией дырок, измерения при низких температурах дадут **положительный знак** для R_H , как это и должно быть для дырочного полупроводника. Но с ростом температуры образца может произойти **инверсия знака** коэффициента Холла (рис.2). Как видно из (20), смена знака произойдет при выполнении условия

$$p\mu_p^2 = n\mu_n^2, \quad (22)$$

а такое условие часто выполняется в **области собственной проводимости**, когда концентрация электронов остается хотя и меньшей, но уже соизмеримой с концентрацией дырок в дырочном полупроводнике, а подвижность электронов обычно больше подвижности дырок.

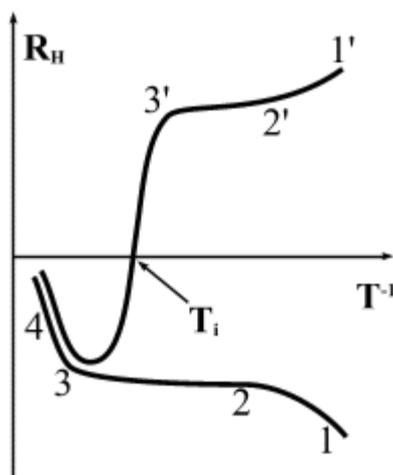


Рис.2. Температурная зависимость коэффициента Холла для электронного (1-2-3-4) и дырочного (1'-2'-3'-4') полупроводников. Показана точка инверсии знака для коэффициента Холла образца P-типа.

В заключение отметим, что эффект Холла является не только исследовательским инструментом для получения информации об основных свойствах полупроводника, но и находит практические применения – на его основе изготавливаются датчики для измерения индукции магнитного поля, сенсорные датчики для клавиатуры электронных приборов и многое другое.

Другим гальваномагнитным эффектом, возможности практического применения которого широко обсуждаются в настоящее время, является **магнитосопротивление**. Это – продольный гальваномагнитный эффект, заключающийся в изменении электропроводности образца, помещенного во внешнее магнитное поле. Искривление траекторий движущихся частиц силой Лоренца приводит к уменьшению длины свободного пробега электронов и дырок в направлении протекания тока через образец, что приводит к **росту удельного сопротивления** (уменьшению электропроводности). В слабых полях удельное сопротивление растет пропорционально B^2 , в сильных – достигает насыщения. Величина, на которую изменяется удельное сопротивление в «обычных» полупроводниках, не превышает нескольких процентов. Но в последние годы были обнаружены вещества, обладающие и полупроводниковыми свойствами и магнитным упорядочением (магнитные полупроводники), в которых при помещении во внешнее магнитное поле удельное сопротивление **уменьшается** на несколько

порядков. Это явление называется **гигантским отрицательным магнитосопротивлением** (ГМС). И хотя природа его к настоящему времени не совсем понятна, большая величина эффекта делает ГМС пригодным для конструирования на его основе датчиков, элементов памяти и т.д.

ЗАДАНИЕ.

1. Измерить при комнатной температуре коэффициент Холла и электропроводность полупроводника. Определить тип носителей заряда, их концентрацию и холловскую подвижность.
2. Измерить зависимость коэффициента Холла от величины индукции магнитного поля.
3. Измерить зависимость коэффициента Холла от температуры образца и определить по зависимости $\ln R_H(1/T)$ ширину запрещенной зоны полупроводника.

Более подробные указания по выполнению работы содержатся в отдельной папке «Изучение эффекта Холла в полупроводниках».

ЛИТЕРАТУРА

- 1) Цидильковский И.М. Электроны и дырки в полупроводниках (энергетический спектр и динамика), М., Наука, 1972.

3. Внутренний фотоэффект в однородных полупроводниках.

Внутренним фотоэффектом называется изменение электропроводности полупроводников под действием освещения.

Явление внутреннего фотоэффекта было открыто в 1873 г. английским инженером У.Смитом. Объяснение же оно получило только после создания квантовой теории твердого тела. В настоящее время это явление широко используется для создания электронных приборов – **полупроводниковых фотоприемников.**

Прежде чем рассматривать физические процессы, протекающие при внутреннем фотоэффекте, определим основные понятия.

- 1) Однородным полупроводником будем считать полупроводник с собственной или примесной проводимостью, причем примеси распределены по объему равномерно и имеют одинаковую химическую природу. Иными словами, в образце отсутствуют т.н. **p–n переходы**. Полупроводниковые фотоприемники, изготовленные на основе однородных полупроводников, называются **фоторезисторами**.
- 2) При освещении полупроводника возможно и увеличение (нормальный фотоэффект) и, значительно реже, уменьшение электропроводности (аномальный фотоэффект). В рамках данного пособия мы рассмотрим только **нормальный фотоэффект**.

При нормальном фотоэффекте происходит увеличение проводимости образца на величину фотопроводимости

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta \sigma, \quad (1)$$

где σ_0 - электропроводность образца в отсутствии освещения, т.н. **темновая проводимость**.

Причиной появления фотопроводимости является, в первую очередь, изменение концентрации носителей заряда за счет **фотогенерации**.

$$\Delta \sigma = e \Delta n \mu_n + e \Delta p \mu_p. \quad (2)$$

Подвижности электронов μ_n и дырок μ_p при освещении изменяются очень незначительно.

Фотогенерация **избыточных** носителей заряда может происходить как за счет процессов поглощения квантов света атомами основного вещества (**собственная фотопроводимость**), так и за счет процессов, в которых участвуют атомы примеси (**примесная фотопроводимость**). В первом случае (рис. 1а) электроны переходят из валентной зоны в зону проводимости и в образце образуются избыточные электроны и дырки. Во втором и третьем случаях (рис. 1; б, в) электрон переходит либо с заполненного донорного уровня в зону проводимости, либо из валентной зоны на пустой акцепторный уровень. Тогда в полупроводнике появятся избыточные носители только одного знака – электроны (б) или дырки (в).

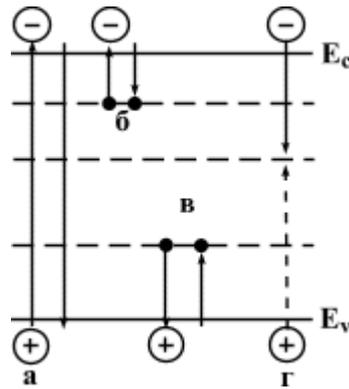


Рис.1. Собственная (а) и примесная (б, в) фотопроводимость в полупроводнике. Процесс (z) – рекомбинация с участием глубокого центра.

Процессы фотоионизации примесных центров происходят при низкой температуре, т.к. при комнатной температуре примесные центры уже обычно ионизированы за счет нагрева образца.

И в случае собственной, и в случае примесной проводимости должно выполняться пороговое условие **красной границы фотоэффекта**, т.е. энергия кванта света должна быть больше некоторой характеристической энергии,

$$h\nu \geq \varepsilon_{\text{крас}} \quad (3)$$

В случае собственной фотопроводимости эта энергия равна ширине запрещенной зоны

$$\varepsilon_{\text{крас}} = \varepsilon_g \quad (3a)$$

а в случае примесной – энергии ионизации примесного центра

$$\varepsilon_{\text{крас}} = \varepsilon_I \quad (3b)$$

Поскольку электронная система полупроводника, будучи выведенной из равновесия, стремится к нему вернуться, то наряду с процессами фотогенерации избыточных носителей будут **обязательно** идти и процессы **рекомбинации** (рис.1). При рекомбинации высвобождается энергия, затраченная на генерацию. Она может высвобождаться в виде тепла (безызлучательная рекомбинация) или же в виде излучения (излучательная рекомбинация). Излучательная рекомбинация лежит в основе работы полупроводниковых источников излучения – светодиодов и лазеров (см. раб. 4).

С учетом двух конкурирующих процессов: фотогенерации и рекомбинации, можно записать систему дифференциальных уравнений для концентрации избыточных электронов и дырок

$$\begin{cases} \frac{d(\Delta n)}{dt} = G_n - R_n \\ \frac{d(\Delta p)}{dt} = G_p - R_p \end{cases}, \quad (4)$$

где G_n, G_p - скорости генерации электронов и дырок;

R_n, R_p - скорости рекомбинации.

Скорости генерации избыточных носителей должны быть пропорциональны количеству поглощенных полупроводником квантов света

$$G = \alpha\beta J. \quad (5)$$

Здесь J – интенсивность светового потока;

α - коэффициент поглощения;

β - **квантовый выход** внутреннего фотоэффекта, т.е. количество электронов или дырок, появившихся в образце в результате поглощения одного фотона при примесной фотопроводимости, или же количество электрон-дырочных пар, появившихся при поглощении одного фотона в случае собственной фотопроводимости. Обычно величина $\beta \leq 1$, но в случае, если энергия кванта в несколько раз превышает ширину запрещенной зоны полупроводника, величина квантового выхода может быть и больше единицы.

Скорости рекомбинации должны зависеть **только** от свойств самого **полупроводника**. В самом общем виде для **межзонной рекомбинации** можно записать

$$R = \gamma(np - n_0p_0), \quad (6)$$

где n, p – концентрации электронов и дырок в освещенном полупроводнике;

n_0, p_0 – равновесные или “темновые” концентрации;

γ – коэффициент пропорциональности.

С учетом того, что $n = n_0 + \Delta n$; $p = p_0 + \Delta p$, формулу (6) можно переписать как

$$R = \gamma(p_0\Delta n + n_0\Delta p + \Delta n\Delta p). \quad (7)$$

Еще более это выражение можно упростить, если рассмотреть два предельных случая – случай «слабого» и «сильного» внешнего воздействия.

При слабом внешнем воздействии, т.е. когда интенсивность падающего на образец излучения невелика, концентрации фотогенерированных носителей заряда существенно меньше их «темновых» концентраций $\Delta n, \Delta p \ll n_0, p_0$. Тогда в (7) можно пренебречь третьим слагаемым и записать для скорости рекомбинации

$$R = \gamma(p_0\Delta n + n_0\Delta p), \quad (8)$$

а с учетом того, что при **межзонной генерации и рекомбинации** количество избыточных электронов равно количеству избыточных дырок $\Delta n = \Delta p$, для скорости рекомбинации получим

$$R = \frac{\Delta n}{\tau_f}. \quad (9)$$

Здесь
$$\tau_f = \frac{1}{\gamma(n_0 + p_0)}, \quad (10)$$

величина, имеющая размерность времени, и, по сути своей, представляющая некоторое **среднее время**, в течение которого **существуют и вносят вклад в электропроводность** фотогенерированные носители. Эта величина называется **временем жизни** неравновесных носителей, или же **временем релаксации энергии**. Процесс рекомбинации, описываемый (9), носит название **линейной** рекомбинации.

Теперь система уравнений (4) может быть сведена к одному простому уравнению

$$\frac{d(\Delta n)}{dt} = \alpha\beta J - \frac{\Delta n}{\tau_f}. \quad (11)$$

Решая это уравнение с начальным условием $\Delta n = 0$ при $t = 0$, получим

$$\Delta n(t) = \alpha\beta\tau_f J \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right]. \quad (12)$$

Полученное решение означает, что при включении внешнего воздействия (освещения) концентрация избыточных носителей заряда **не изменяется мгновенно**, а нарастает по асимптотическому закону (12), приближаясь в пределе при $t \rightarrow \infty$ к **стационарному значению**

$$\Delta n_{\text{стац}} = \alpha\beta\tau_f J. \quad (13)$$

Если теперь выключить освещение, то уравнение (11) запишется в виде

$$\frac{d(\Delta n)}{dt} = -\frac{\Delta n}{\tau_f}, \quad (14)$$

а его решением будет

$$\Delta n(t) = \alpha\beta\tau_f J \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right). \quad (15)$$

Изменение фотопроводимости (или фототока) со временем будет подчиняться тем же законам, что и зависимость $\Delta n(t)$, а стационарное значение фотопроводимости при межзонной линейной рекомбинации будет задаваться соотношением

$$\Delta\sigma_{\text{стац}} = \alpha\beta\tau_f J e(\mu_n + \mu_p). \quad (16)$$

Таким образом, стационарное значение фотопроводимости (фототока) будет в этом случае линейно зависеть от интенсивности светового потока J , а законы нарастания и спада фотопроводимости при включении и выключении освещения содержат одну и ту же постоянную времени τ_f .

Теперь рассмотрим случай **сильного внешнего воздействия**. В полупроводниках с малой концентрацией примесей и/или при большой интенсивности светового потока выполнится условие $\Delta n, \Delta p \gg n_0, p_0$. Считая по-прежнему рекомбинацию межзонной и пренебрегая двумя первыми слагаемыми в уравнении 7, получим для скорости **квадратичной** рекомбинации

$$R = \gamma(\Delta n)^2. \quad (17)$$

При включении освещения избыточная концентрация носителей будет теперь возрастать по закону

$$\Delta n(t) = \sqrt{\frac{\alpha\beta J}{\gamma}} \tanh(\sqrt{\alpha\beta\gamma J}t), \quad (18)$$

а при $t \rightarrow \infty$ будет достигать стационарного значения

$$\Delta n_{стат} = \sqrt{\frac{\alpha\beta J}{\gamma}}. \quad (19)$$

При выключении внешнего воздействия

$$\frac{d(\Delta n)}{dt} = -\gamma(\Delta n)^2 \quad (20)$$

и

$$\Delta n(t) = \frac{\sqrt{\frac{\alpha\beta J}{\gamma}}}{\sqrt{\alpha\beta\gamma J}t + 1}. \quad (21)$$

Следовательно, при межзонной квадратичной рекомбинации стационарная концентрация генерированных светом носителей, а также фотопроводимость и фототок будут зависеть от интенсивности светового потока как \sqrt{J} . При этом нарастание фотопроводимости при включении света и спад при выключении будут происходить по разным законам (см. ф. 18, 21).

Зависимость фототока (фотопроводимости) от интенсивности светового потока (освещенности) является для полупроводникового фотоэлемента важнейшей характеристикой и называется **световой** или **люкс-амперной** характеристикой. Как следует из (13), (19) эта характеристика линейна при малых освещенностях (в области линейной рекомбинации) и нелинейна в области больших интенсивностей светового потока (рис. 2).

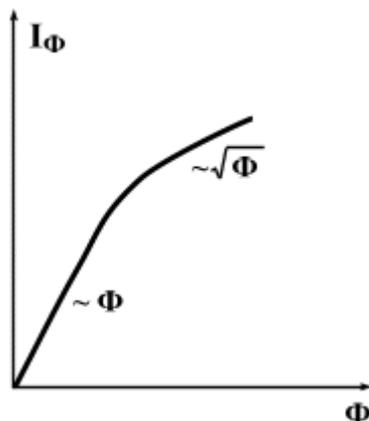


Рис. 2. Зависимость фототока от освещенности (люкс-амперная характеристика).

Тангенс угла наклона касательной к кривой ЛАХ на ее линейном участке

$$K = \frac{\Delta I_\phi}{\Phi} \quad (22)$$

называется **интегральной чувствительностью фотоэлемента**.

Второй важнейшей характеристикой фотоэлемента является его **спектральная чувствительность** – зависимость фототока от длины волны падающего излучения. Спектральная чувствительность имеет вид кривой с максимумом, ограниченной со стороны длинных волн - длиной волны, соответствующей красной границе фотоэффекта (см. ф.3):

$$\lambda_{\text{крас}} = \frac{hc}{\varepsilon_{\text{крас}}} \quad (23).$$

При уменьшении длины волны фототок сначала резко возрастает, достигает максимума и снова падает в области коротких длин волн (рис.3).

Падение фототока в коротковолновой области спектра обусловлено увеличением коэффициента поглощения в этой области до значений $\alpha = 10^3-10^5 \text{ см}^{-1}$. Соответственно глубина проникновения света в полупроводник уменьшается до $10^{-3}-10^{-5} \text{ см}$, т.е. все падающее излучение поглощается в тонком приповерхностном слое. А этот слой всегда богат дефектами, приводящими к увеличению скорости рекомбинации (**поверхностная рекомбинация**) и, следовательно, к уменьшению времени

жизни и уменьшению fotocувствительности. Действительно, область спектральной чувствительности можно расширить в коротковолновую сторону спектра, выполнив, например, тщательную обработку поверхности кристалла.

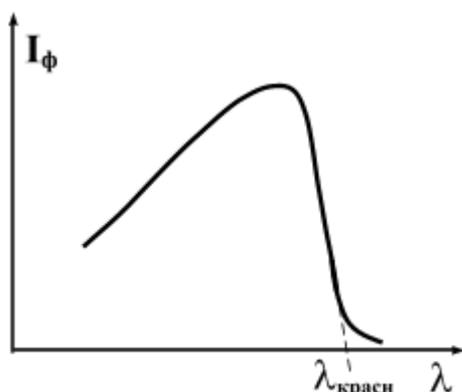


Рис.3. Типичная спектральная зависимость фототока в полупроводнике.

Третьей важнейшей **характеристикой** полупроводникового фотоприемника является его **амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)**. Она определяет способность прибора реагировать на быстро меняющийся световой поток. Если период, в течение которого изменяется световой сигнал $T < \tau_f$, то при включении освещения фотопроводимость не достигнет своего стационарного значения, а при выключении – не успеет упасть до нуля (рис.4). В результате регистрируемый сигнал будет иметь постоянную составляющую $\Delta\sigma_{\sim}$ и переменную составляющую $\Delta\sigma_{\sim}$, амплитуда которой будет тем меньше, чем меньше T по сравнению с τ_f . Можно показать, что для **линейной межзонной рекомбинации**

$$\Delta\sigma_{\sim} = \Delta\sigma_{\text{стац}} \tanh \frac{1}{4\tau_f f}, \quad (24)$$

где $f = 1/T$ – частота модуляции (прерывания) светового потока.

Если построить зависимость $\Delta\sigma_{\sim}/\Delta\sigma_{\text{стац}}$ от частоты f , то можно достаточно просто определить графическим методом время жизни неравновесных носителей заряда τ_f . Для этого следует провести прямую, параллельную оси частот на уровне $\Delta\sigma_{\sim}/\Delta\sigma_{\text{стац}} = 0,76$, опустить на ось частот перпендикуляр из точки пересечения этой прямой с АЧХ (рис. 4),

отметить точку пересечения этого перпендикуляра с осью частот – f^* и рассчитать время жизни по формуле

$$\tau_f = \frac{1}{4f^*}. \quad (25)$$

В случае квадратичной рекомбинации АЧХ качественно будет иметь тот же вид, т.е. переменная составляющая фотопроводимости **будет падать** с ростом частоты модуляции светового потока. Заметим, что в этом случае быстродействие прибора будет определяться наиболее **медленным** процессом, а именно – спадом фотопроводимости при выключении света по закону (21).

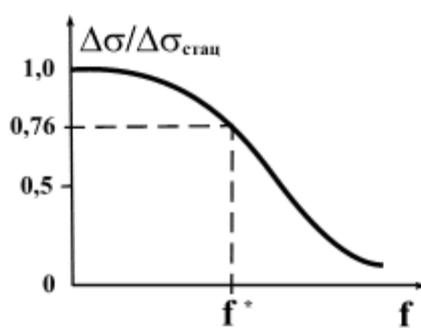


Рис.4. Определение времени жизни неравновесных носителей заряда по амплитудно-частотной характеристике фотоприемника.

Среди других характеристик полупроводниковых фотоэлементов отметим **вольт-амперные характеристики**, которые для фоторезисторов **линейны**, как для темнового, так и для фототока, и **температурные зависимости** фототока и темнового тока, которые обычно **нелинейны**. В некотором ограниченном интервале температур T_1 - T_2 их, впрочем, можно аппроксимировать линейной зависимостью и ввести **температурные коэффициенты (ТК)** фототока и темнового тока по формуле

$$TK = \left| \frac{I(T_1) - I(T_2)}{T_1 - T_2} \right|, \quad (26)$$

где I - либо темновой, либо фототок.

В заключение отметим, что в полупроводниках часто реализуется не межзонный механизм рекомбинации, а т.н. рекомбинация через примесные центры (**рекомбинация**

Шокли-Рида). В этом случае процесс рекомбинации идет в две стадии. Сначала на **глубокий** примесный уровень захватывается электрон из зоны проводимости, а потом на этот же уровень захватывается дырка из валентной зоны (рис. 1д). Вблизи этого примесного центра и происходит процесс рекомбинации. Решения уравнений, описывающих рекомбинацию Шокли-Рида, достаточно сложны и их анализ выходит за рамки данного описания. Отметим только, что качественная картина явления и основные характеристики фотоэлементов будут отличаться от рассмотренных выше не очень значительно.

ЗАДАНИЕ

В данной работе предлагается определить некоторые характеристики и параметры полупроводниковых фотоэлементов – фоторезисторов из сульфида кадмия CdS.

1. При комнатной температуре измерить вольт-амперные характеристики темнового тока и фототока.
2. Изучить световую (люкс-амперную характеристику). По линейному участку характеристики определить чувствительность прибора.
3. Исследовать АЧХ фотоприемника. Определить по ф. 25 время жизни неравновесных носителей заряда.
4. Измерить температурную зависимость темнового тока. Определить ТК темнового тока в области температур от комнатной до 50 °С.

Более подробные указания по выполнению работы содержатся в отдельной папке «Внутренний фотоэффект в однородных полупроводниках».

ЛИТЕРАТУРА

- 1) Аут И., Генцов Д., Герман К. Фотоэлектрические явления, М., Мир, 1980.

4. Полупроводниковый инжекционный лазер.

Полупроводниковые инжекционные лазеры, так же, как и другой тип твердотельных излучателей – **светодиоды**, являются важнейшим элементом любой оптоэлектронной системы. В основе работы того и другого приборов лежит явление **электролюминесценции**. Применительно к вышеуказанным полупроводниковым излучателям, механизм электролюминесценции реализуется путем **излучательной рекомбинации** неравновесных носителей заряда, инжектированных через **p-n переход**.

Первые светодиоды появились на рубеже 50-х и 60-х годов XX века, а уже в 1961 г. **Н.Г. Басов, О.Н. Крохин и Ю.М. Попов** предложили использовать инжекцию в вырожденных p-n переходах для получения лазерного эффекта. В 1962 г. американским физикам **Р. Холлу** и соотр. удалось зарегистрировать сужение спектральной линии излучения полупроводникового светодиода, что было интерпретировано как проявление лазерного эффекта («сверхизлучение»). В 1970 г. российскими физиками – **Ж.И. Алферовым** с соотр. были изготовлены первые **лазеры на гетероструктурах**. Это позволило сделать приборы пригодными для массового серийного выпуска, что было в 2000 г. отмечено Нобелевской премией по физике. В настоящее время полупроводниковые лазеры получили самое широкое распространение в основном в устройствах для записи и считывания информации с компьютерных, аудио- и видео-компакт-дисков. Основными достоинствами полупроводниковых лазеров являются:

1. **Экономичность**, обеспечиваемая высокой эффективностью преобразования энергии накачки в энергию когерентного излучения;
2. **Малая инерционность**, обусловленная короткими характеристическими временами установления режима генерации ($\sim 10^{-10}$ с);
3. **Компактность**, связанная со свойством полупроводников обеспечивать огромное оптическое усиление;
4. **Простое устройство**, низковольтное питание, совместимость с интегральными микросхемами («микрочипами»);

5. Возможность **плавной перестройки длины волны** в широком диапазоне вследствие зависимости оптических свойств полупроводников от температуры, давления и т.д.

Главной особенностью полупроводниковых лазеров является использование в них **оптических переходов** с участием уровней энергии (энергетических состояний) **основных электронных энергетических зон** кристалла. В этом отличие полупроводниковых лазеров от, например, рубиновых лазеров, где используются оптические переходы между примесными уровнями иона хрома Cr^{3+} в Al_2O_3 . Для применения в полупроводниковых лазерах наиболее подходящими оказались полупроводниковые соединения $\text{A}^{\text{III}}\text{B}^{\text{V}}$ (см. Введение). Именно на основе этих соединений и их **твердых растворов** изготавливается промышленностью большая часть полупроводниковых лазеров. Во многих полупроводниковых материалах этого класса рекомбинация избыточных носителей тока осуществляется путем **прямых** оптических переходов между заполненными состояниями вблизи дна зоны проводимости и свободными состояниями вблизи вершины валентной зоны (рис.1). Большая вероятность оптических переходов в **прямозонных** полупроводниках и большая плотность состояний в зонах позволяют получить **высокое оптическое усиление** в полупроводнике.

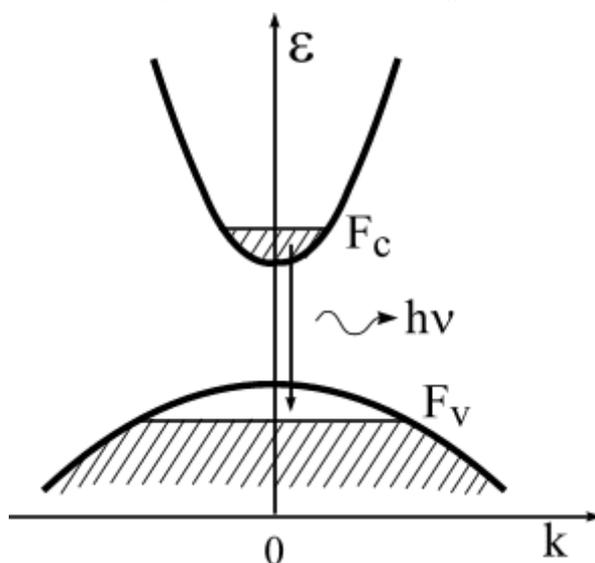


Рис.1. Испускание фотона при излучательной рекомбинации в прямозонном полупроводнике с инверсной заселенностью.

Рассмотрим основные принципы работы полупроводникового лазера. Если полупроводниковый кристалл, находится в состоянии **термодинамического равновесия** с окружающей средой, то он способен только **поглощать** падающее на него излучение. Интенсивность света, прошедшего в кристалле расстояние x , задается известным соотношением **Бугера-Ламберта**

$$J(x) = J(0)(1 - R)e^{-\alpha x} . \quad (1)$$

Здесь R - коэффициент отражения света;

α - коэффициент поглощения света.

Для того, чтобы свет **усиливался**, проходя через кристалл, а не ослаблялся, требуется, чтобы коэффициент α был меньше нуля, что в **термодинамически-равновесной среде невозможно**. Для работы любого лазера (газового, жидкостного, твердотельного) требуется, чтобы рабочая среда лазера находилась в состоянии **инверсной заселенности** – таком состоянии, при котором количество электронов на высоколежащих уровнях энергии было бы бóльшим, чем на ниже расположенных уровнях (такое состояние называется еще «состоянием с отрицательной температурой»). Получим соотношение, описывающее состояние с инверсной заселенностью в полупроводниках.

Пусть ε_1 и ε_2 – **оптически связанные** между собой энергетические уровни, первый из которых находится в валентной, а второй – в зоне проводимости полупроводника (рис.2). Термин «оптически связанные» означает, что переходы электрона между ними разрешены правилами отбора. Поглотив квант света с энергией $h\nu_{12}$, электрон переходит с уровня ε_1 на уровень ε_2 . Скорость такого перехода будет пропорциональна вероятности заселения первого уровня f_1 , вероятности того, что второй уровень пуст: $(1 - f_2)$, и плотности потока фотонов $P(h\nu_{12})$

$$\mathcal{G}_{12} = B_{12} f_1 (1 - f_2) P(h\nu_{12}) . \quad (2)$$

Обратный переход – с верхнего уровня на нижний, может происходить двумя способами – за счет **спонтанной** и **вынужденной** рекомбинации. Во втором случае взаимодействие кванта света с

электроном, находящимся на уровне ε_2 , «заставляет» рекомбинировать электрон с **испусканием** кванта света, **тождественного** тому, который вызвал процесс вынужденной рекомбинации. Т.о. в системе происходит усиление света, что и составляет суть работы лазера. Скорости спонтанной и вынужденной рекомбинации запишутся как:

$$g_{21}^c = A_{21}f_2(1 - f_1) \quad (3)$$

и
$$g_{21}^g = B_{21}f_2(1 - f_1)P(h\nu_{12}). \quad (4)$$

В состоянии термодинамического равновесия

$$g_{12} = g_{21}^c + g_{21}^g. \quad (5)$$

Используя условие 5, можно показать, что коэффициенты B_{12} , B_{21} и A_{21} («коэффициенты Эйнштейна») связаны между собой, а именно:

$$B_{12} = B_{21}; \quad A_{21} = \frac{8\pi n^3 (h\nu_{12})^2}{h^3 c^3} B_{21}, \quad (6)$$

где n – показатель преломления полупроводника; c – скорость света.

В дальнейшем, впрочем, спонтанную рекомбинацию мы учитывать не будем, т.к. скорость спонтанной рекомбинации не зависит от плотности потока фотонов в рабочей среде лазера, и скорость вынужденной рекомбинации будет при больших значениях $P(h\nu_{12})$ существенно превышать скорость спонтанной рекомбинации. Для того, чтобы происходило усиление света, скорость вынужденных переходов «сверху вниз» должна превышать скорость переходов «снизу вверх»:

$$B_{21}f_2(1 - f_1)P(h\nu) > B_{12}f_1(1 - f_2)P(h\nu). \quad (7)$$

Записав вероятности заселения электронами уровней с энергией ε_1 и ε_2 в виде

$$f_1 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_1 - F_V}{kT}} + 1}; \quad f_2 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_2 - F_C}{kT}} + 1}, \quad (8)$$

получим условие инверсной заселенности в полупроводниках

$$F_C - F_V > \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \geq \varepsilon_g, \quad (9)$$

т.к. минимальное расстояние между уровнями ε_1 и ε_2 как раз равно ширине запрещенной зоны полупроводника ε_g . Это соотношение известно как соотношение **Бернара-Дюрафура**.

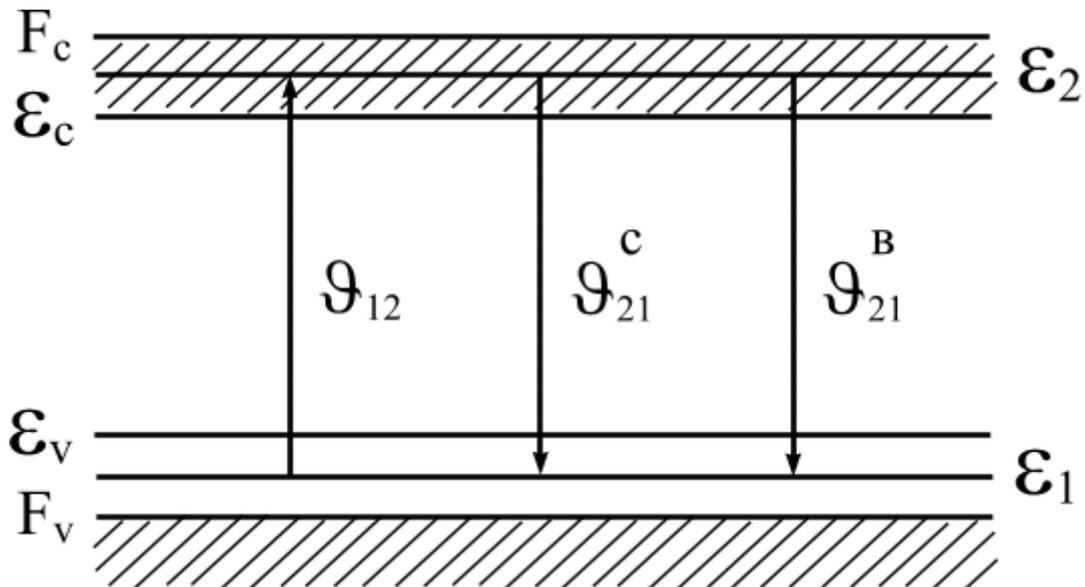


Рис.2. Энергетическая диаграмма полупроводника с инверсной заселенностью уровней. Заполненные электронами состояния заштрихованы.

В формулу 9 входят значения т.н. **квазиуровней Ферми** - уровней Ферми отдельно для зоны проводимости F_C и валентной зоны F_V . Такая ситуация возможна только для неравновесной, а точнее, для **квазиравновесной** системы. Для формирования в обеих разрешенных зонах уровней Ферми (уровней, разделяющих заполненные электронами и пустые состояния (см. Введение)), требуется, чтобы **время релаксации импульса** электронов и дырок было на несколько порядков **меньше времени жизни** избыточных носителей заряда:

$$\tau \ll \tau_f. \quad (10)$$

В результате **неравновесный** в целом электронно-дырочный газ можно рассматривать как комбинацию **равновесного электронного** газа в зоне проводимости и **равновесного дырочного** газа в валентной зоне (рис.2).

Процедура создания в рабочей среде лазера (в нашем случае – в полупроводниковом кристалле) инверсной заселенности носит название **накачки**. Накачка полупроводниковых лазеров может осуществляться извне светом, пучком быстрых электронов, сильным радиочастотным полем, ударной ионизацией в самом полупроводнике. Но наиболее простым, экономичным и, в силу того, **наиболее распространенным** способом накачки полупроводниковых лазеров является **инжекция** носителей заряда в **вырожденном р-п переходе** (см. методич. пособие “Физика полупроводниковых приборов” ; туннельный диод). Принцип такой накачки понятен из рис.3, где приведена **энергетическая диаграмма** такого перехода в состоянии термодинамического равновесия и при **большом прямом смещении**. Видно, что в области d , непосредственно примыкающей к р-п переходу, реализуется инверсная заселенность – энергетическое расстояние между квазиуровнями Ферми больше, чем ширина запрещенной зоны.

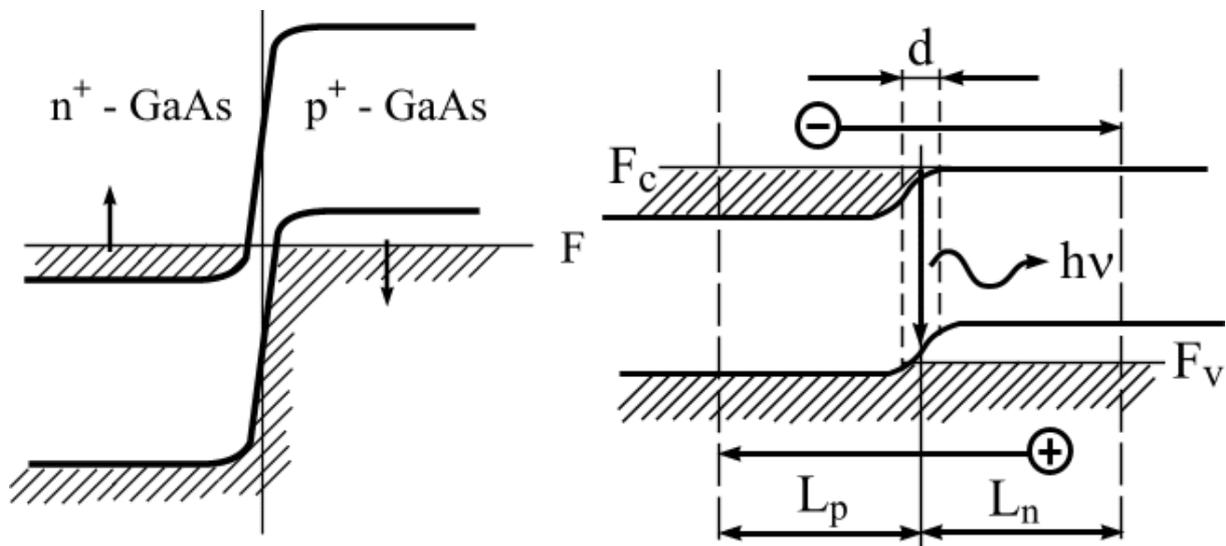


Рис.3. Вырожденный р-п переход в состоянии термодинамического равновесия (слева) и при большом прямом смещении (справа).

Однако создание в рабочей среде инверсной заселенности является **необходимым**, но еще **не достаточным условием** для генерации лазерного излучения. В любом лазере, и в полупроводниковом – в частности, часть подводимой к прибору мощности накачки будет

бесполезно теряться. И только когда мощность накачки превысит определенную величину - **порог генерации**, лазер начинает работать как квантовый усилитель света. При превышении порога генерации:

- а) **резко возрастает** интенсивность испускаемого прибором излучения (рис.4а);
- б) **сужается** спектральная линия излучения (рис. 4б);
- в) излучение становится **когерентным и узконаправленным**.

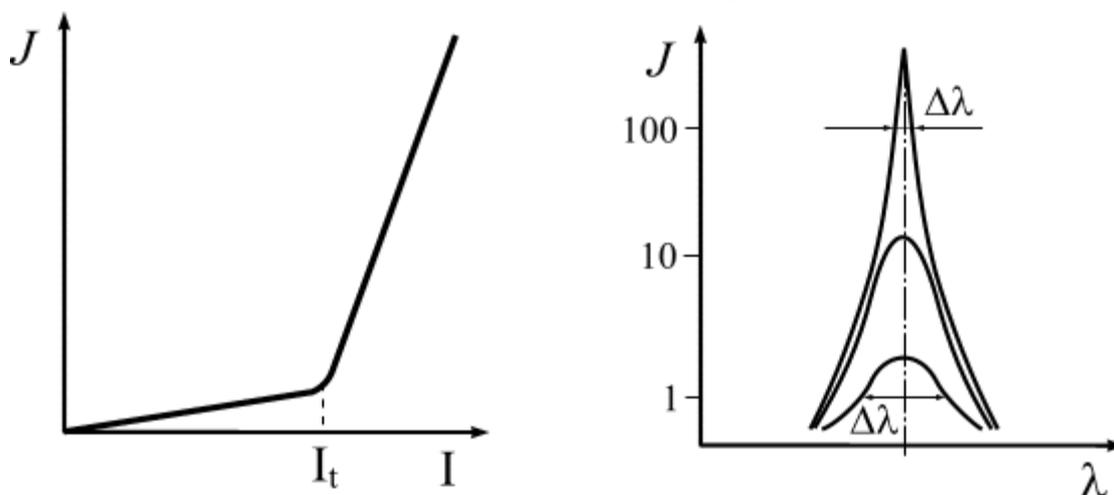


Рис.4. Рост интенсивности (слева) и сужение спектральной линии излучения (справа) полупроводникового лазера при превышении током порогового значения.

Для достижения пороговых условий генерации рабочую среду лазера обычно помещают в **оптический резонатор**. Это **увеличивает длину оптического пути** пучка света в рабочей среде, облегчает достижение порога генерации, способствует лучшей фокусировке пучка и т.д. Из всего разнообразия типов оптических резонаторов в полупроводниковых лазерах наибольшее распространение получил простейший **резонатор Фабри-Перо** – два плоско-параллельных зеркала, перпендикулярных р-п переходу. Причем в качестве зеркал используются отшлифованные грани самого полупроводникового кристалла.

Рассмотрим прохождение электромагнитной волны через такой резонатор. Примем коэффициент пропускания и коэффициент отражения левого зеркала резонатора за t_1 и r_1 , правого (через которое излучение выходит наружу) - за t_2 и r_2 ; длина резонатора – L . Пусть на левую грань

кристалла падает извне электромагнитная волна, уравнение которой запишем в виде:

$$E = E_0 e^{i\omega(t - \frac{x\tilde{n}}{c})} = E_i e^{-x\Gamma}. \quad (11)$$

Пройдя через левое зеркало, кристалл и правое зеркало, часть излучения выйдет через правую грань кристалла, а часть отразится и снова пойдет к левой грани (рис.5).

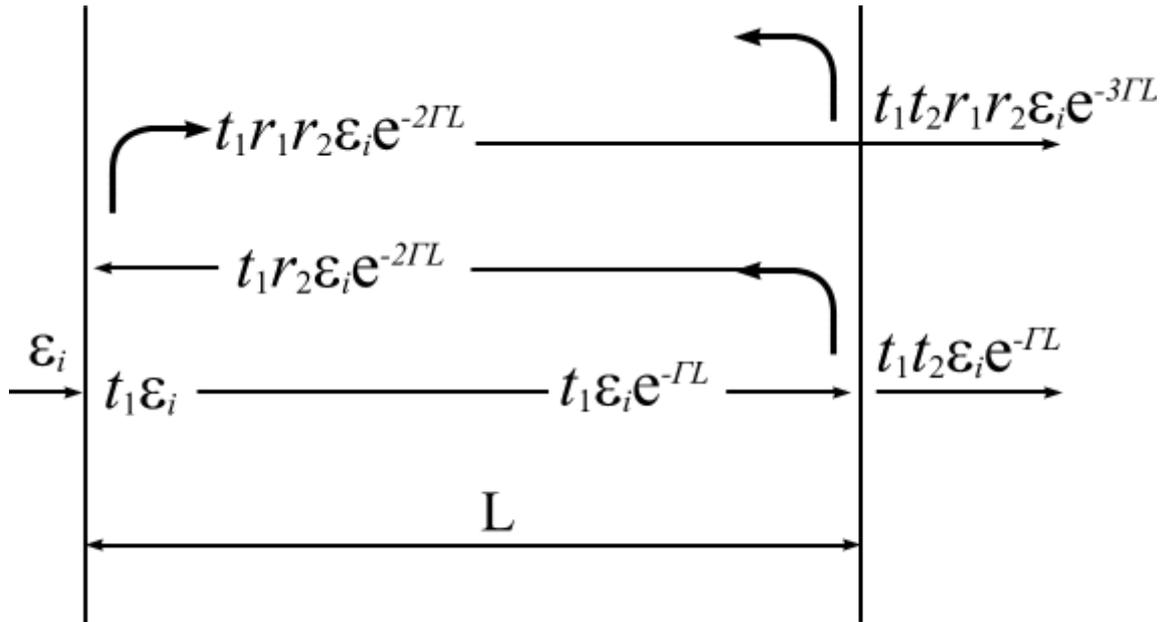


Рис.5. Электромагнитная волна в резонаторе Фабри-Перо.

Дальнейший ход луча в резонаторе, амплитуды выходящих и отраженных лучей понятны из рисунка. Просуммируем амплитуды всех электромагнитных волн, вышедших **через правую грань кристалла** :

$$\begin{aligned} \sum E_{\text{прав}} &= E_i t_1 t_2 e^{-\Gamma L} + E_i t_1 t_2 r_1 r_2 e^{-3\Gamma L} + E_i t_1 t_2 r_1^2 r_2^2 e^{-5\Gamma L} + \dots = \\ &= E_i t_1 t_2 e^{-\Gamma L} (1 + r_1 r_2 e^{-2\Gamma L} + (r_1 r_2)^2 e^{-4\Gamma L} + \dots) = E_i \frac{t_1 t_2 e^{-\Gamma L}}{1 - r_1 r_2 e^{-2\Gamma L}} \end{aligned}$$

(12).

Потребуем, чтобы сумма амплитуд всех волн, выходящих через правую грань, не равнялась нулю даже при исчезающе малой амплитуде волны на левой грани кристалла. Очевидно, что это может быть только тогда, когда и знаменатель дроби в (12) стремится к нулю. Отсюда получим:

$$r_1 r_2 e^{-2\Gamma L} = 1, \quad (13)$$

а с учетом того, что интенсивность света $J \sim E^2$, т.е. $r_1 = \sqrt{R_1}$; $r_2 = \sqrt{R_2}$, где R_1, R_2 - коэффициенты отражения зеркал – граней кристалла «по интенсивности», и, к тому же, $r_1 \approx r_2$, окончательно соотношение для порога генерации запишем как:

$$R \cdot e^{-2\Gamma L} = 1. \quad (14)$$

Из (11) следует, что множитель 2Γ , входящий в показатель экспоненты, связан с комплексным показателем преломления кристалла:

$$2\Gamma = 2i\omega \frac{\tilde{n}}{c} = 2i\omega \frac{n - i\chi}{c} = 2i\omega \frac{n}{c} + 2\omega \frac{\chi}{c}. \quad (15)$$

В правой части (15) первое слагаемое определяет фазу световой волны, а второе – амплитуду. В обычной, термодинамически равновесной среде $2\omega \frac{\chi}{c} = \alpha$ - происходит ослабление (поглощение) света, в активной рабочей среде лазера это же соотношение следа записать в виде

$-2\omega \frac{\chi}{c} = g - \alpha_i$, где g - коэффициент усиления света, а символом α_i

обозначены все потери энергии накачки, не обязательно только оптической природы. Тогда амплитудное пороговое условие переписется как:

$$R \cdot e^{(g - \alpha_i)L} = 1 \quad \text{или} \quad g = \frac{1}{L} \ln \frac{1}{R} + \alpha_i. \quad (16)$$

Таким образом, мы определили **необходимое** (9) и **достаточное** (16) условия генерации полупроводникового лазера. Как только величина **коэффициента усиления** превысит **потери** на величину, определяемую первым слагаемым (16), в рабочей среде с инверсной заселенностью уровней начнется усиление света. Сама же величина коэффициента усиления будет зависеть от мощности накачки или, что для инжекционных лазеров то же самое, от величины **рабочего тока**. В обычной рабочей области полупроводниковых лазеров $50 \text{ см}^{-1} \leq g \leq 400 \text{ см}^{-1}$ и линейно зависит от величины рабочего тока

$$g = \beta(I - I_0) . \quad (17)$$

Из (16) и (17) для **порогового тока** получим:

$$I_t = I_0 + \frac{\alpha_i}{\beta} + \frac{1}{\beta L} \ln \frac{1}{R} , \quad (18)$$

где через I_0 обозначен т.н. «порог инверсии» – значение рабочего тока, при котором достигается инверсная заселенность в полупроводнике. Т.к. обычно $I_0 \ll I_t$, первым слагаемым в (18) можно пренебречь.

Коэффициент пропорциональности β для лазера с использованием обычного p-n перехода и изготовленного, например, из GaAs можно рассчитать по формуле

$$\beta = \frac{1,59 \cdot 10^{-5}}{n^2 E^2 \Delta E} , \quad (19)$$

где E и ΔE – положение и полуширина спектральной линии излучения лазера.

Расчет по формуле 18 дает при комнатной температуре $T=300\text{K}$ для такого лазера очень высокие значения значения пороговой плотности тока $5 \cdot 10^4 \text{ A/cm}^2$, т.е. такие лазеры могут эксплуатироваться либо при хорошем охлаждении, либо в режиме коротких импульсов. Поэтому, как уже отмечалось выше, только создание в 1970 г. группой Ж.И.Алферова **лазеров на гетеропереходах** позволило **на 2 порядка снизить** пороговые токи полупроводниковых лазеров, что в конечном итоге и привело к массовому применению этих приборов в электронике.

Для того, чтобы понять, как этого удалось достичь, рассмотрим подробнее **структуру потерь** в полупроводниковых лазерах. К неспецифическим, **общим для любых лазеров**, и в принципе **неустранимым потерям** следует отнести потери на **спонтанные переходы** и потери на **термализацию**.

Спонтанные переходы с верхнего уровня на нижний будут присутствовать всегда, а поскольку излучаемые при этом кванты света будут иметь случайное распределение по фазе и направлению распространения (не будут **когерентны**), то затраты энергии накачки на

генерацию спонтанно-рекомбинирующих электрон-дырочных пар следует отнести к потерям.

При любом способе накачки в зону проводимости полупроводника будут забрасываться электроны, с энергией, большей энергии квазиуровня Ферми F_C . Эти электроны, теряя энергию в столкновениях с дефектами решетки, достаточно быстро опускаются до квазиуровня Ферми – процесс, называемый **термализацией**. Энергия, потерянная электронами при рассеянии их на дефектах решетки, и есть потери на термализацию.

К **частично-устраняемым** потерям можно отнести потери на **безызлучательную рекомбинацию**. В прямозонных полупроводниках за безызлучательную рекомбинацию отвечают обычно глубокие примесные уровни (см. «Фотоэффект в однородных полупроводниках»). Тщательная очистка полупроводникового кристалла от примесей, образующих такие уровни, уменьшает вероятность безызлучательной рекомбинации.

И, наконец, потери на **нерезонансное поглощение** и на **токи утечки** можно значительно уменьшить, применяя для изготовления лазеров **гетероструктуры**.

В отличие от обычных р-п переходов, где справа и слева от точки контакта располагаются одинаковые полупроводники, отличающиеся только составом примесей и типом проводимости, в гетероструктурах по обе стороны контакта располагаются разные по химическому составу полупроводники. Эти полупроводники имеют различную ширину запрещенной зоны, поэтому в точке контакта будет наблюдаться «скачок» потенциальной энергии электрона (типа «крюк» или типа «стенка» (рис.6)).

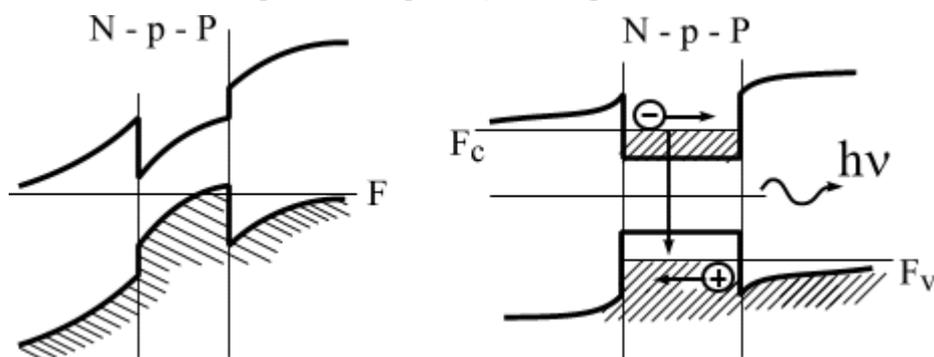


Рис.6. Инжекционный лазер на основе двусторонней гетероструктуры в состоянии термодинамического равновесия (слева) и в рабочем режиме (справа).

В зависимости от типа проводимости полупроводников гетероструктуры могут быть **изотипными** (p-P; n-N гетероструктуры) и **анизотипными** (p-N; n-P гетероструктуры). Заглавными буквами в гетероструктурах принято обозначать полупроводник с большей шириной запрещенной зоны. Далекое не любые полупроводники способны образовывать качественные гетероструктуры, пригодные для создания на их основе электронных приборов. Для того, чтобы граница раздела содержала как можно меньше дефектов, компоненты гетероструктуры должны иметь **одинаковую кристаллическую структуру** и очень **близкие значения** постоянной кристаллической решетки. Среди полупроводников группы $A^{III}B^V$ только две пары соединений отвечают этому требованию: GaAs-AlAs и GaSb-AlSb и их **твердые растворы** (см. Введение), т.е. $GaAs-Ga_xAl_{1-x}As$; $GaSb-Ga_xAl_{1-x}Sb$. Усложняя состав полупроводников, можно подобрать и другие пары, пригодные для создания гетероструктур, например $InP-In_xGa_{1-x}As_yP_{1-y}$; $InP-Al_xGa_{1-x}As_ySb_{1-y}$. Инжекционные лазеры изготавливаются и из гетероструктур на основе полупроводниковых соединений $A^{IV}B^{VI}$, таких как $PbTe-Pb_xSn_{1-x}Te$; $PbSe-Pb_xSn_{1-x}Se$ - эти лазеры излучают в дальней инфракрасной области спектра.

Потери на **токи утечки** в гетеролазерах удается практически полностью устранить благодаря разнице в ширине запрещенных зон полупроводников, формирующих гетероструктуру. Действительно (рис.3), ширина области d вблизи обычного p-n перехода, где выполняется условие инверсной заселенности, составляет всего ≈ 1 мкм, в то время как инжектированные через переход носители заряда рекомбинируют в гораздо большей по размерам области L_n+L_p шириной ≈ 10 мкм. Рекомбинация носителей в этой области не вносит вклад в когерентное излучение. В **двусторонней N-p-P гетероструктуре** (рис.6) область с инверсной заселенностью **совпадает с толщиной слоя узкозонного полупроводника** в центре гетеролазера. **Практически все** инжектированные в эту область из широкозонных полупроводников электроны и дырки **там и рекомбинируют**. Потенциальные барьеры на границе раздела широкозонных и узкозонного полупроводника не дают «растекаться» носителям заряда, что резко повышает эффективность такой структуры по сравнению с обычным (рис.3) p-n переходом.

В слое узкозонного полупроводника будут сосредоточены не только неравновесные электроны и дырки, но и **большая часть излучения**.

Причина этого явления заключается в том, что полупроводники, составляющие гетероструктуру, отличаются величиной показателя преломления. Как правило, показатель преломления выше у узкозонного полупроводника. Поэтому все лучи, имеющие угол падения на границу двух полупроводников

$$\Theta \geq \Theta_{12} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}, \quad (20)$$

будут претерпевать **полное внутреннее отражение**. Следовательно, излучение будет «заперто» в активном слое (рис.7), что существенно уменьшит потери на **нерезонансное поглощение** (обычно это т.н. «поглощение свободными носителями заряда»).

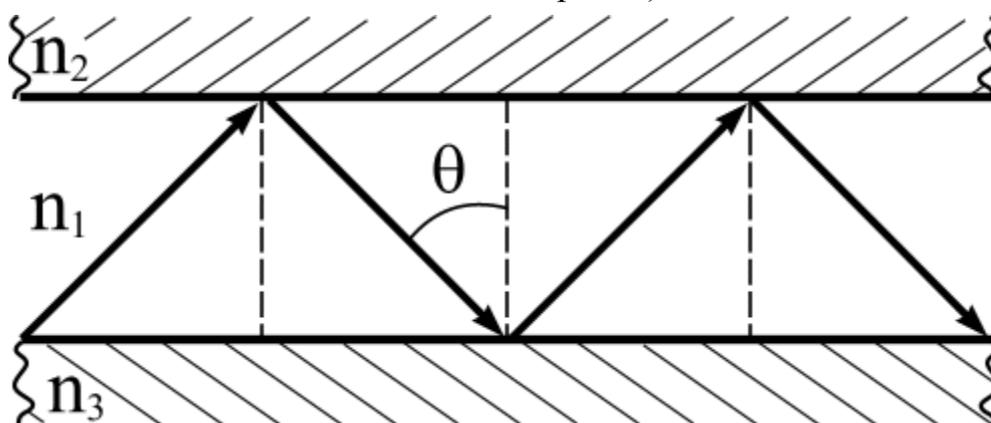


Рис.7. Оптическое ограничение при распространении света в гетероструктуре. При угле падения, большем θ , происходит полное внутреннее отражение от границы раздела полупроводников, составляющих гетероструктуру.

Все вышесказанное и позволяет получить в гетеролазерах **гигантское оптическое усиление** при микроскопических размерах активной области: толщина активного слоя $d \approx 1 \text{ мкм}$, длина резонатора $L \approx 100 \text{ мкм}$. Гетеролазеры работают при комнатной температуре в **непрерывном режиме**, а характерные **плотности рабочих токов** не превышают 500 А/см^2 . **Спектр излучения** большинства серийно-выпускаемых лазеров, в которых рабочей средой является **арсенид галлия**, представляет узкую линию с максимумом в ближней инфракрасной области спектра $\lambda_{\text{max}} \approx 0,9 \text{ мкм}$, хотя разработаны

полупроводниковые лазеры, дающие видимое излучение, и лазеры, излучающие в далекой инфракрасной области с $\lambda_{\max} \approx 10 \text{ мкм}$.

ЗАДАНИЕ

В данной работе предлагается изучить работу полупроводникового инжекционного лазера.

1. Исследовать спектральную характеристику и найти полуширину линии излучения.
2. Измерить и построить диаграмму направленности лазерного луча.

Более подробные указания по выполнению работы содержатся в отдельной папке «Полупроводниковый инжекционный лазер».

ЛИТЕРАТУРА

- 1) Кейси Х., Паниш М. Лазеры на гетероструктурах, М., Мир, 1981.
- 2) Богданкевич О.В., Дарзбек С.А., Елисеев П.Г. Полупроводниковые лазеры, М., 1976.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1) Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела (2 т.), М., Мир, 1979.
- 2) Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г. Физика полупроводников, М., Наука, 1977.
- 3) Шалимова К.В. Физика полупроводников, М., Энергоатомиздат, 1985.
- 4) Стилбанс Л.С. Физика полупроводников, М., Сов. Радио, 1967.
- 5) Блатт Ф. Физика электронной проводимости в твердых телах, М., Мир, 1971.