КАЗАНСКИЙ(ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОТЧЕТ ЗА ПЕРВЫЙ ЭТАП ПРОЕКТА

Математическое моделирование стационарных

нелинейных задач подземной фильтрации жидкостей

при наличии тотечных источников

Выполнено:

аспиранткой кафедры вычислительной

математики института вычислительной

математики и информационных

технологий КФУ

Задворновой Г.О.

КАЗАНЬ – 2014 г.

Содержание

Введение.

Настоящая работа посвящена исследованию итерационного метода решения нелинейной стационарной задачи фильтрации несжимаемой жидкости в ограниченной области при наличии точечного источника. На границе области давление считается известным. Определяющее соотношение, связывающее градиент давления и скорость фильтрации, предполагается сильно монотонным, липшиц-непрерывным и зависящим от пространственных координат. Решение рассматриваемой задачи существует (см. [1]) и имеет аддитивное представление с явным выделением в одном слагаемом особенности, порожденной наличием сосредоточенного источника. Относительно второго, более регулярного, слагаемого (принадлежит пространству $W_2^{(1)}$) формулируется вариационная задача и для ее решения применяется метод простой итерации. Исследование сходимости итерационного метода осуществляется методами, описанными в монографии Кошелева [2]. Устанавливаются значения итерационного параметра при которых итерационная последовательность сходится со скорость геометрической прогрессии в норме пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}$. Далее, при дополнительных условиях на определяющее соотношение, доказана гельдеровость второго слагаемого и сходимость итерационного процесса при оптимальном значении параметра со скорость геометрической прогрессии в норме пространства C^{γ}. Отметим, что при других условиях на определяющий закон гельдеровость второго слагаемого установлена в [3], [4].

1 *Постановка задачи.*

Рассматривается краевая задача описывающая установившийся процесс фильтрации несжимаемой жидкости в пористой неоднородной среде. Филь-трация происходит в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с липшиц-непрерывной границей $\partial\Omega$, на которой давление считается известным, при наличии точечного источника интенсивности q в начале координат (считаем, что начало координат – внутренняя точка Ω):

$$-\mathrm{div}\left(\frac{g\left(x, |\nabla w(x)|\right)}{|\nabla w(x)|}\,\nabla w(x)\right) = \, q\delta(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$w(x) = w_\gamma(x), \quad x \in \partial\Omega\,. \tag{2}$$

Предполагаем, что для каждого $t \geqslant 0$ функция $x \to g(x,t)$ измерима на Ω, существуют постоянные $L \geqslant \mu > 0$, $p_0 \geqslant 2$, $k_0, c_0, \varepsilon_0 > 0$ и функция $d_0 \in L_{p_0}(\Omega)$, такие, что выполнены следующие неравенства

$$L\,(\,s - t\,) \;\geqslant\; g(x,s) - g(x,t) \;\geqslant\; \mu\,(\,s - t\,), \quad s \geqslant t > 0,\, x \in \Omega\,, \tag{3}$$

$$\beta > \frac{p_0 - 1}{p_0} n - 1 \tag{4}$$

$$|g(x,t) - k_0 t| \;\leqslant\; c_0\,|\,x\,|^\beta t + d_0(x)\,,\; t \geqslant 0,\; x \in B_{\varepsilon_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon_0\} \subset \Omega\,. \tag{5}$$

Считаем, что существует функция $\widetilde{w} \in W_{p_0}^{(1)}(\Omega)$, со следом, удовлетворяющим равенству

$$\widetilde{w}(x) = w_\gamma, \quad x \in \partial\Omega\,. \tag{6}$$

В сделанных предположениях краевая задача (1), имеет решение (см. [1]), в том смысле, что существует функция $w \in W_1^{(1)}(\Omega)$ со следом, удовлетворяющим равенству (2), и для w выполнено вариационное равенство

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{g\,(x, |\nabla w(x)|)}{|\nabla w(x)|} \, \nabla w(x) \, , \, \nabla \eta(x) \right) \, dx = q \, \eta(0)), \quad \forall \, \eta \in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{7}$$

Из [1] следует, что это решение представимо в виде $w = \xi + u$, где $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, а функция ξ является решением линейной задачи(k_0 – постоянная из неравенства (5)):

$$k_0 \triangle \xi(x) = q \delta(x), \; x \in \Omega; \quad \xi(x) = w_{\gamma}(x), \; x \in \partial\Omega \,. \tag{8}$$

2 *Итерационный метод решения задачи.*

Решение задачи (1), (2) начнем с определения решения задачи (8). С этой целью решим линейную краевую задачу

$$k_0\triangle\tilde{\xi}(x) = 0,\ x \in \Omega; \quad \tilde{\xi}(x) = w_\gamma(x) - k_0^{-1}q\phi(x),\ x \in \partial\Omega\,, \tag{9}$$

тогда $\xi = \tilde{\xi} + k_0^{-1}q\phi$, где функция ϕ - фундаментальное решение оператора Лапласа

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\ln(|x|),\ n = 2;\ \phi(x) = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}},\ n \geq 3, \tag{10}$$

σ_n - мера единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Относительно функции $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$ запишем задачу (7) в эквивалентном виде(см. [1]):

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{g\,(x, |\nabla(\xi + u)(x)|)}{|\nabla(\xi + u)(x)|}\,\nabla(\xi + u)(x)\; - k_0\,\nabla\,\xi(x)\,,\ \nabla\eta(x) \right)\,dx = 0,\ \forall\,\eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{11}$$

и для её решения построим последовательность $u_m \in \overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega), m = 0, 1, 2, \ldots$ (u_0 задано произвольно), используя метод простой итерации ($\tau > 0$ – итерационный параметр):

$$\int\limits_\Omega (\nabla u_{m+1}(x), \nabla\eta(x))\ dx = \int\limits_\Omega (\nabla u_m(x), \nabla\eta(x))\ dx -$$

$$-\tau\int\limits_\Omega (G(x, \nabla u_m(x)), \nabla\eta(x))\ dx, \tag{12}$$

где функция $G : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определена следующим образом:

$$G(x, \lambda) = g(x, |\nabla\xi(x) + \lambda|)\frac{\nabla\xi(x) + \lambda}{|\nabla\xi(x) + \lambda|} - k_0\nabla\xi(x), \quad x \in \Omega,\ \lambda \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

3 *Исследование сходимости итерационного метода.*

Исследование сходимости итерационнного процесса (12) проведем следуя методам, изложенным в монографии Кошелева [2]. Воспользоваться непо-средственно результатами [2] о сходимости метода последовательных прибли-жений для задачи (11) мы не можем, поскольку функция $G(x,\lambda)$(определенная равенством (13)) , вообще говоря, не удовлетворяет условиям 1)-3) [2, с. 16]. Нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1 *Пусть функция $u \in W^{(1)}_{p_0}(\Omega)$, (параметр p_0 из условия (4)), тогда функция $G(x,\nabla u(x))$ принадлежит пространству $L_{p_0}(\Omega)$.*

Доказательство. Из (6), (9) и (10) следует, что функция ξ удовлетворяет условиям:

$$|\,\nabla\xi(x)\,| \leqslant \frac{C_n}{|\,x\,|^{n-1}}, \quad x \in B_\varepsilon \subset \Omega,\, C_n > 0\,;\, \xi \in W^{(1)}_{p_0}(\Omega \backslash B_\varepsilon). \tag{14}$$

Пользуясь неравенствами (5), (14), получаем для λ из $\mathbb{R}^n$ и x из B_{ε_0}:

$$|G(x,\lambda)| = \left|\,(g(x,|\nabla\xi(x)+\lambda|) - k_0|\nabla\xi(x)+\lambda|)\frac{\nabla\xi(x)+\lambda}{|\nabla\xi(x)+\lambda|} + k_0\lambda\,\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\,g(x,|\nabla\xi(x)+\lambda|) - k_0|\nabla\xi(x)+\lambda|\,\right| + k_0\,|\lambda| \leqslant c_0\,|\,x\,|^\beta|\nabla\xi(x)+\lambda| +$$

$$+ d_0(x) + k_0\,|\lambda| \leqslant \frac{c_0\,C_n}{|\,x\,|^{n-1-\beta}} + d_0(x) + (c_0\,|\,x\,|^\beta + k_0)\,|\lambda| \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{d}(x) + (c_0\,|\varepsilon|^\beta + k_0)\,|\lambda|. \tag{15}$$

Из условия (4) на β имеем, что $p_0\,(1+\beta-n) > -n$, следовательно, функция $x \to |x|^{1+\beta-n}$ принадлежит $L_{p_0}\,(B_{\varepsilon_0})$, а значит, и функция $\widetilde{d} = |x|^{1+\beta-n} + d_0$ из пространства $L_{p_0}(B_{\varepsilon_0})$.

Пользуясь условием (3), получаем для любых $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и любых $x \in \Omega \backslash B_{\varepsilon_0}$:

$$|G(x,\lambda)| \leqslant |(g(x, |\nabla\xi(x)+\lambda|)| + k_0|\nabla\xi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant L|\nabla\xi(x)+\lambda| + k_0|\nabla\xi(x)| = L|\lambda| + \widetilde{d}(x),$$

где функция $\widetilde{d} = (L+k_0)|\nabla\xi|$, в силу (14), принадлежит $L_{p_0}(\Omega\backslash B_{\varepsilon_0})$.

Пользуясь последним неравенством и (15) получаем оценку

$$|G(x,\nabla u(x))| \leqslant \widetilde{k}|\nabla u(x)| + \widetilde{d}(x),\; x\in\Omega,\;\; \widetilde{k} = \max\{(c_0\,|\varepsilon|^{\beta} + k_0), L\},$$

из которой следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Далее введем пространство $W^{(1)}_{2,\,\alpha}(\Omega)$ с конечной нормой

$$\|u\|_\alpha = \sup_{x_0\in\overline{\Omega}} \left(\int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)|x-x_0|^\alpha\, dx\right)^{1/2},$$

и функцию

$$H(u,\eta;\tau) = \int\limits_\Omega \left(\nabla u(x) - \tau G(x,\nabla u(x))\,,\, \nabla\eta(x)\right)\, dx.$$

Лемма 2 *Пусть для функции g выполнены условия (3) – (5), функции $u, v \in W^{(1)}_{2,\,\alpha}(\Omega)$, $\eta \in W^{(1)}_{2,\,-\alpha}(\Omega)$, тогда имеет место неравенство*

$$|H(u,\eta;\tau) - H(v,\eta;\tau)| \leqslant K_\tau \left[\int\limits_\Omega |\nabla(u-v)|^2|x-x_0|^\alpha\, dx\right]^{1/2} \times$$

$$\times \left[\int\limits_{\Omega} |\nabla \eta|^2 |x - x_0|^{-\alpha} \, dx \right]^{1/2} \tag{16}$$

где $K_\tau = \max\{1 - \tau\mu; \tau L - 1\}$.

Доказательство. Поскольку выполнены условия (3), то при фиксированном x из Ω отображение $B(\lambda) \equiv g(x, |\lambda|)|\lambda|^{-1}\,\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является липшиц-непрерывным с постоянной L , сильно монотонным с постоянной μ ([5]). Очевидно, что B - потенциальное отображение, тогда, согласно Лемме 4.14 [6, с. 129], отображение $U_\tau(\lambda) \equiv \lambda - \tau g(x, |\lambda|)|\lambda|^{-1}\,\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ липшиц-непрерывно:

$$|\, U_\tau(\lambda) - U_\tau(\kappa) \,| \leqslant K_\tau \,|\, \lambda - \kappa \,| \tag{17}$$

$$\forall\, \lambda, \kappa \in \mathbb{R}^n; \qquad K_\tau = \max\{1 - \tau\mu; \tau L - 1\}.$$

Пользуясь (17) для всех x из Ω получаем следующее неравенство

$$|(\nabla u(x) - \tau G(x, \nabla u(x))) - (\nabla v(x) - \tau G(x, \nabla v(x)))| =$$

$$= |\, U_\tau(\nabla(\xi + u)) - U_\tau(\nabla(\xi + v)) \,| \leqslant K_\tau \,|\, \nabla u(x) - \nabla v(x) \,|. \tag{18}$$

Применяя (18) и неравенство Гельдера получаем (16)

$$|H(u, \eta; \tau) - H(v, \eta; \tau)| \leqslant \int\limits_{\Omega} |(\nabla u - \tau G(x, \nabla u)) - (\nabla v - \tau G(x, \nabla v))| \, |\nabla \eta| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant K_\tau \int\limits_{\Omega} |\nabla u - \nabla v| \, |\nabla \eta| \, |x - x_0|^{\alpha/2} \, |x - x_0|^{-\alpha/2} \, dx \leqslant$$

$$\leqslant K_\tau \left[\int\limits_{\Omega} |\nabla (u - v)|^2 |x - x_0|^{\alpha} \, dx \right]^{1/2} \left[\int\limits_{\Omega} |\nabla \eta|^2 |x - x_0|^{-\alpha} \, dx \right]^{1/2}.$$

Лемма доказана.

Далее нам понадобятся некоторые понятия и утвеждения из работы [2] [стр81] и для полноты изложения мы их приведем.

Пусть $u(x) \in C^{\infty}(\Omega)$ и $x_0 \in \Omega$ - произвольная точка, расстояние от которой до $\partial\Omega$ больше, чем $\delta > 0$. Пусть $B_{\delta}(x_0)$ - шар с центром x_0 и радиусом δ. Рассмотрим сферическую систему координат (r, θ), где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ принадлежит единичной сфере S, а r - расстояние между $x \in \Omega$ и x_0. Пусть $Y_{s,k}(\theta)$, $s = 0, 1, \ldots$; $k = 1, \ldots, k_s$, - полная ортонормированная система функций, являющихся собственными функциями оператора Бельтрами на единичной сфере S, соответствующими собственным числам $\lambda_s = s(s + n - 2)$ кратности k_s. Разлагая функцию $u(x)$ в ряд по $Y_{s,k}(\theta)$, получаем

$$u(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{k_s} u_{s,k}(r) Y_{s,k}(\theta). \tag{19}$$

Отметим, что $u_{s,k}(0) = 0$ при $s \geq 1$. Эти равенства следуют из того, что $u_{s,k}(r)$ являются Фурье-коэффициентами $u(x)$ относительно системы сферических функций. Поэтому при $s \geq 1$ справедливо равенство

$$u_{s,k}(r) = \int_{\Omega} [u(r, \theta) - u(x_0)] Y_{s,k}(\theta) \, dS,$$

вытекающее из ортогональности $Y_{s,k}(\theta)$, $s \geq 1$, к функции $Y_{0,1}(\theta) = const$. Устремляя r к нулю, получаем указанные равенства.

Определим функцию $v(x)$ следующим образом:

$$v(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{k_s} v_{s,k}(r) Y_{s,k}(\theta), \tag{20}$$

где $u_{s,k}(r)$ и $v_{s,k}(r)$ связаны равенствами

$$v_0(r) = -\int\limits_r^\delta u_0^{'}(\rho)\rho^\alpha \, d\rho, \tag{21}$$

$$v_s(r) = r^\alpha u_s(r)\zeta(r), \;\; s = 1, 2, \ldots . \tag{22}$$

где $\alpha \in (-n, 2-n) \cup (2-n, 0]$, а $\zeta(r)$ гладкая на отрезке $[0, \delta]$ функция, удовлетворяющая следующим условиям: $0 \le \zeta(r) \le 1$,

$$\zeta(r) = \begin{cases} 1\,, & 0 \le r \le \delta/2, \\ \\ 0\,, & 3\delta/4 \le r \le \delta, \end{cases}$$

$$|\zeta'(r)| \le C\delta^{-1}, \;\; \zeta'^2(r)\zeta^{-1}(r) \le C\delta^{-2},$$

где постоянная C не зависит от δ.

Рассмотрим интегралы

$$X(u, v) = \int\limits_{B_\delta(x_0)} (\nabla u, \nabla v) \, dx, \tag{23}$$

$$Y_\alpha(v) = \int\limits_{B_\delta(x_0)} |\nabla v|^2 r^{-\alpha} \, dx. \tag{24}$$

Лемма 3 [2, стр. 81] *Если $\alpha \in (-n, 0] \backslash \{2-n\}$, δ достаточно мало, а $u \in W_{2,\alpha}^{(1)}(B_\delta(x_0); x_0)$, то для интегралов (23),(24) справедливы неравенства*

$$X(u, v) \ge \left(min\left\{1, 1 - \frac{\alpha(\alpha+n-2)}{2(n-1)}\right\} - \eta \right) \int\limits_{B_\delta(x_0)} |\nabla u|^2 r^\alpha \, dx -$$

$$-C \int\limits_{B_\delta(x_0)} |\nabla u|^2\, dx, \tag{25}$$

$$Y_\alpha(v) \leq \left(1 - \frac{\alpha(n-2)}{n-1} + \eta\right) \int\limits_{B_\delta(x_0)} |\nabla u|^2 r^\alpha\, dx + C \int\limits_{B_\delta(x_0)} |\nabla u|^2\, dx, \tag{26}$$

где $\eta(\delta) > 0$ *может быть сделана сколь сколь угодно малой при достаточно малом* δ. *Кроме того, предполагается, что* $u|_{\partial B_\delta} = 0$ *при* $\alpha \in (2-n, 0]$.

Лемма 4 [2, стр. 33] *Пусть последоватедьность* σ_m, $m = 0, 1, \ldots,$ *положительных чисел удовлетворяет неравенству*

$$\sigma_{m+1}^2 \leq A\sigma_m\sigma_{m+1} + Bq^m\sigma_m + Cq^{2m}, \tag{27}$$

где A, B, C *и* q *- неотрицательные постоянные,* $0 \leq A < 1$ *и* $0 \leq q < 1$. *Тогда существует такое* Q, $0 \leq Q < 1$, *что справедлива оценка* $\sigma_m \leq DQ^m$, *где* $D = const > 0$ *не зависит от* m. *Если в неравенстве (27)* $q = 1$, *то все* σ_m *ограничены.*

Основным результатом данной работы являются следующие утверждения.

Теорема 1 *Пусть для функции* g *выполнены условия (3) – (5). Тогда итерационный метод (12) при* $0 < \tau < 2/L$ *сходится к решению задачи (11) как геометрическая прогрессия в норме пространства* $\overset{\circ}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$

$$\|u_m - u\| \leqslant (K_\tau)^m \|u_0 - u\|, \; m = 0, 1, 2, \ldots, \quad \|v\|^2 = \int\limits_\Omega |\nabla v(x)|^2\, dx, \tag{28}$$

где $K_\tau = \max\{1-\tau\mu; \tau L - 1\}$, $\inf\limits_{\tau>0} K_\tau = (L-\mu)/(L+\mu)$, *достигается при* $\tau_* = 2/(L+\mu)$.

Доказательство. Для решения u задачи (11) очевидно выполнено равенство:

$$\int\limits_\Omega (\nabla u(x), \nabla\eta(x))\ dx = \int\limits_\Omega (\nabla u(x) - \tau G(x, \nabla u(x))\,,\ \nabla\eta(x))\ dx$$

Вычтем из этого равенства равенство (12), получим

$$\int\limits_\Omega (\nabla u(x) - \nabla u_{m+1}(x), \nabla\eta(x))\ dx = H(u,\eta;\tau) - H(u_m,\eta;\tau)$$

В предыдущем равенсте положим $\eta = u - u_{m+1}$ и применим к правой части лемму 2 при $\alpha = 0$, найдем

$$\|u-u_{m+1}\|^2 \leqslant K_\tau\|u-u_m\|\|u-u_{m+1}\|,\ m=0,1,2,\ldots \qquad (29)$$

Из (29) очевидно получаем неравенства (28). Теорема доказана.

Теорема 2 *Пусть для функции* g *выполнены условия (3) – (5) с постоянной* $p_0 > n$ *и константами* L *и* μ *удовлетворяющими неравенству:* $A \equiv (L-\mu)/(L+\mu)\sqrt{(n-2)^2/(n-1)+1} < 1$. *Тогда существует такое достаточно малое* $\gamma > 0$, *что решение задачи (11) во всякой строго внутренней подобласти* ω *гельдерово с показателем* γ. *При* $\tau = \tau_*$ *и начальном приближении* $u_0 \in W^{(1)}_{p_0}(\tilde\omega)\bigcap \overset{\circ}{W}{}^{(1)}_2(\Omega)$, $\omega \subset\subset \tilde\omega \subset\subset \Omega$, *итерационный процесс (12) сходится как геометрическая прогрессия с показателем* $A_\varepsilon = A + \varepsilon$ $(\varepsilon = \varepsilon(\gamma) > 0$ *сколь угодно мало при достаточно малом* $\gamma)$ *в норме пространства* $W^{(1)}_{2,\alpha}(\omega)$, *где* $\alpha = 2 - n - 2\gamma$ *(и следовательно в норме пространства* $C^\gamma(\omega)$*).*

Введем последовательность строго вложенных областей так, чтобы $\omega \subset\subset \ldots \subset\subset \omega_m \subset\subset \ldots \subset\subset \omega_0 \subset\subset \tilde{\omega}$. Предполагая $u_m \in W_{p_0}^{(1)}(\omega_m)$ и воспользовавшись леммой 1 (в доказательстве теоремы 3.1 используется условие 3) [2, с. 16]), получаем что $\nabla u_m - \tau G(x, \nabla u_m) \in L_{p_0}(\omega_m)$ и тогда из (12) следует что $u_{m+1} \in W_{p_0}^{(1)}(\omega_{m+1})$. Поскольку $u_0 \in W_{p_0}^{(1)}(\tilde{\omega})$ имеем $u_m \in W_{p_0}^{(1)}(\omega)$ для $m = 0, 1, 2, \ldots$

Далее так выбираем достаточно малое $\gamma > 0$ (это возможно в силу условия $p_0 > n$, см. дазательство леммы 2.6 [2, с. 61]), чтобы при $\alpha = 2 - n - 2\gamma$ выполнялось вложение $W_{p_0}^{(1)}(\omega) \subset W_{2,\alpha}^{(1)}(\omega)$, и таким образом $u_m \in W_{2,\alpha}^{(1)}(\omega)$ для $m = 0, 1, 2, \ldots$

Обозначим $w_m = u_m - u_{m-1}$ и запишем разность двух последовательных интегральных тождеств (12)

$$\int\limits_\Omega (\nabla w_{m+1}, \nabla v)\, dx = \int\limits_\Omega (\nabla w_m, \nabla v)\, dx - \tau \int\limits_\Omega (G(x, \nabla u_{m+1}) - G(x, \nabla u_m), \nabla v)\, dx.$$

Применим к правой части последнего равенства лемму 2 (в доказательстве теоремы 3.1 используется лемма 2.4 [2, с. 57]) при $\alpha = 2 - n - 2\gamma$ и получим неравенство

$$\int\limits_\Omega (\nabla w_{m+1}, \nabla v)\, dx \leqslant \frac{L+\mu}{L-\mu} \left[\int\limits_\Omega |\nabla w_m|^2 |x - x_0|^\alpha\, dx \right]^{1/2} \times$$
$$\times \left[\int\limits_\Omega |\nabla v|^2 |x - x_0|^{-\alpha}\, dx \right]^{1/2}.$$

Или можно переписать так

$$X(w_{m+1}, v) \leq K \left(\int\limits_\Omega |\nabla w_m|^2\, r^\alpha\, dx \right)^{1/2} Y_\alpha^{1/2}(v).$$

Здесь X и Y_α определяются формулами (23), (24), $r = |x - x_0|$, $K = (L+\mu)/(L-\mu)$, а функция v - равенством (20) при $u = w_{m+1}$.

Пусть δ_0 достаточно мало и $0 < \delta < \delta_0$. Применяя неравенства (25) и (26), получаем следующую оценку:

$$\left(1 - \frac{\alpha(\alpha+n-2)}{2(n-1)} - \eta\right) \int\limits_{B_\delta(x_0)} |\nabla w_{m+1}|^2 r^\alpha \, dx \le K \left(\int\limits_\Omega |\nabla w_m|^2 \, r^\alpha \, dx\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left[\left(1 - \frac{\alpha(n-2)}{n-1} + \eta\right) \int\limits_{B_\delta(x_0)} |\nabla w_{m+1}|^2 r^\alpha \, dx + C||w_{m+1}||^2\right]^{1/2} + C||w_{m+1}||^2, \tag{30}$$

Из теоремы 1 следует неравенство $||w_m|| < CK^n$.

Взяв $\varepsilon = \varepsilon(\gamma) > 0$ сколь угодно малом при достаточно малом γ, из леммы 3 $\eta(\delta) > 0$ может быть сделана сколь сколь угодно малой при достаточно малом δ , получаем

$$1 - \frac{\alpha(\alpha+n-2)}{2(n-1)} = 1 + \varepsilon, \tag{31}$$

$$1 - \frac{\alpha(n-2)}{n-1} = 1 + \frac{(n-2)^2}{n-1} + \varepsilon. \tag{32}$$

Пусть

$$A = 1 + \frac{(n-2)^2}{n-1}.$$

Тогда (32) можно записать как $A_\varepsilon = A + \varepsilon$.

Обозначим

$$\sigma_m^2 = \int\limits_{B_\delta(x_0)} |\nabla w_m|^2 r^\alpha \, dx. \tag{33}$$

Тогда учитывая (31)-(33) из неравенства (30) получаем

$$\sigma_{m+1}^2 \leq A_\varepsilon \sigma_m \sigma_{m+1} + C_1 K^m \sigma_m + C_2 K^{2m}.$$

Из леммы 4 [2, стр. 33] следует неравенство $\sigma_m \leq CA_\varepsilon^n$, где C не зависит от x_0. Беря супремум по всем $x_0 \in \overline{\omega}$ в левой части, получаем

$$\sup_{\delta > \delta_0, x_0 \in \overline{\omega}} \int\limits_{B_\delta(x_0)} |\nabla(u_m - u_{m-1}|^2 r^\alpha \, dx \leq CA_\varepsilon^{2n}.$$

Используя формулу

$$||u||''_\alpha = \sup_{\delta \leq \delta_0, x_0 \in \overline{\Omega}} \left(\int\limits_{\Omega_\delta(x_0)} |\nabla u|^2 |x - x_0|^\alpha \, dx \right)^{1/2},$$

имеем $||u_m - u_{m-1}||''_\alpha \leq CA_\varepsilon^n$. Из эквивалентности норм (см.[2, стр. 46]) в $H_\alpha(\omega)$ следует неравенство $||u_m - u_{m-1}||_\alpha \leq CA_\varepsilon^n$, где норма определяется формулой

$$||u||_\alpha = \sup_{x_0 \in \overline{\Omega}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 |x - x_0|^\alpha \, dx \right)^{1/2}.$$

Из вложения пространства H_α в $C^{0,\gamma}$(см. теорему 2.1 [2, стр. 48]) вытекает, что решение гельдерово. Теорема доказана.

Заключение.

В работе построена и исследована математическая модель для стационарных задач теории фильтрации несжимаемых жидкостей при наличии сосредоточенных источников в неоднородных пористых средах при наличии вырождения по градиенту решения.

Доказана сходимость метода простой итерации со скоростью геометрической прогрессии к решению стационарной нелинейной неоднородной задачи фильтрации при наличии точечного источника в норме пространств Соболева и Гельдера.

Полученные результаты могут быть использованы при математическом моделиромании и численном решении в задачах возникающих в подземной гидромеханики и нефтедобычи.

Список литературы

[1] *Задворнов О.А.* Существование решения квазилинейной эллиптической краевой задачи при наличии точечных источников// Ученые записки Казанского государственного университета. Физико-математические науки. – 2010. – Т. 125, кн. 1. – С. 155-163.

[2] *Кошелев А.И.* Регулярность решений эллиптических уравнений и систем// М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 240 с.

[3] *Задворнов О.А., Задворнова Г.О.* О свойствах гладкости решения нелинейной задачи фильтрации при наличии точечного источника // Ученые записки Казанского университета. Серия физико-математические науки. - 2012. - Т. 154, Кн. 1. - С. 162-166.

[4] *Задворнова Г.О.* Исследование свойств решения нелинейной задачи фильтрации с точечным источником // Итоговая научно-образовательная конференция студентов Казанского федерального университета 2012 года: сборник статей. - Казань: Казанский университет, 2012. - Т. 5. - С. 51-54.

[5] *Ляшко А.Д., Карчевский М.М.* О решении некоторых нелинейных задач теории фильтрации// Известия ВУЗов. Математика. - 1975. - N 6. - С. 73-81.

[6] *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. - М.: Мир, 1978. - 336 с.